



**REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI “ISMAIL QEMALI”, VLORE
FAKULTETI I SHKENCAVE TEKNIKE
DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS**



DISERTACION

PËR GRADËN SHKENCORE

“Doktor”

Fraktalet dhe vetitë e tyre topologjike

Programi studimit

Algjebër- Gjeometri

**Kandidati
Msc. Arben Baushi**

**Udhëheqës Shkencor
Prof. Dr. Nertila Gjini (Kokona)**

VLORE, 2019



**REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI “ISMAIL QEMALI”, VLORE
FAKULTETI I SHKENCAVE TEKNIKE
DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS**



TEZË DOKTORATURE

TEMA:

Fraktalet dhe vetitë e tyre topologjike

Kandidati
Msc. Arben Baushi

Udhëheqës Shkencor
Prof. Dr. Nertila Gjini (Kokona)

Mbrohet para komisionit më datë ____/____/2019

KOMISIONI I MBROJTJES

1. _____ (Kryetar)
2. _____ (Oponent)
3. _____ (Oponent)
4. _____ (Anëtar)
5. _____ (Anëtar)

VLORE, 2019

Deklaratë mbi origjinalitetin

Me anë të kësaj deklarate, unë i nënshkruari Arben BAUSHI, deklaroj se jam autor i punimit të disertacionit me titull:

“Fraktalet dhe vetitë e tyre topologjike”

Deklaroj në përgjegjësinë time personale se i gjithë punimi i dizertacionit, rezultatet si dhe përfundimet e arritura janë origjinale dhe në përputhje me rregulloren e Doktoraturës dhe ligjin e Arsimit të lartë për mbrojtjen e gradës Doktor dhe etikës profesionale.

I gjithë informacioni i marrë në literaturë dhe i përfshirë në punimin e këtij dizertacioni është kryer në përputhje të plotë me rregullat akademike dhe etikën profesionale, duke cituar me përpikmëri çdo referencë.

Deklaruesi
Arben Baushi

Përmbledhje

Gjeometria fraktale është një nga fushat e matematikës, e cila është zhvilluar për të përshkruar dhe interpretuar disa forma të veçanta të natyrës, të cilat janë larg figurave të rregullta. Gjeometria fraktale është një nga mjetet e rëndësishme për të shpjeguar gjeometrinë e vërtetë të natyrës. Fraktalet përbëhen nga pjesë që janë, të ngjashme me të gjithën . Për shembull, Bashkësia e Cantorit është bashkimi i dy kopjeve të ngjashme, dhe vija von Koch (e ngjashme me flokun e dëborës) përbëhet nga katër kopje të ngjashme. Funkzioni përsëritës përdoret për të prodhuar imazhe komplekse. Një element i rëndësishëm për të kuptuar ndërtimin e fraktalave është studimi β - zbrëthimeve dhe të kuptojmë këto zbrëthime, disa njohuri nga teoria e fjalës kërkohen. Një alfabet është një grup i caktuar simbolesh (shkronja). Në alfabetin A një fjalë e fundme ose e pafundme në këtë alfabet A është vargu i fundëm apo i pafundëm i shkronjave në A . Fjalët i shkruajmë $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in A$, ku fjala u është formuar nga vendosja e shkronjave njëra pas tjetrës . Numrat Pisot dhe numrat Salem luajnë një rol të rëndësishëm në teori të ndryshme si analiza harmonike, teoria automatike, sistemet dinamike, teoria ergodike në zhvillimin e këtyre teorive. Ka shumë artikuj që shpjegojnë lidhjen mes zgjerimit beta dhe numrit Pisot. Numrat e Fibonaccit, na japin gjenerimin e modeleve morfologjike për bimët matematikisht. Një familje e madhe e tiling që mbulon një plan mund të ndërtohet nga zbrëthimi në bazën β (ku β është një numër jo i plotë $\beta > 1$). Lidhshmëria mbi Pisot luan një rol të rëndësishëm në studimin e sistemit përsëritës dhe dinamikës simbolike. Përkufizimi i numrave Pisot dhe informacion mbi këtë grup numrash i ilustron në këtë temë dhe shembuj të ndryshëm shpjegojnë atë që na paraqesim. Në kapitullin e tretë paraqesim vetitë topologjike të fraktaleve duke dhënë disa klasifikime të numrave Pisot për fuqi të ndryshme. Rasti i numrit Pisot të fuqisë së 4, $x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ është një rast që gjeneron fraktal të palidhur. Kapitulli i fundit lidh fraktalet në fushën e mjekësisë. Duke u nisur nga vetëngjashmëria si karakteristika kryesore e një fraktali, Jayalalitha G. (2008) studioi qarkullimin e gjakut në sistemin kardiovaskular nisur nga një model biologjik të një strukture të vetë- ngjashme. Në fund ne japim disa përfundime të punës në këtë temë.

Fjalët kyçe : Gjeometria fraktale, tiling, funksioni i përsëritës, numra algjebrik, numra Pisot,

β - zbrëthmet , dimensionin hausdorff, vetë-ngjashmëri, gjysëmkrystale , zbrëthimet më i madhi , zbrëthimet më i vogël.

Abstract

Fractal geometry is one of mathematics fields, which is developed to describe and interpret some special forms of nature, which are far from the regular figures. Fractal geometry is one of the important tools to explain the true geometry of nature. . Fractals are made up of parts that are, similar to all. For example, Cantor's set is the merger of two similar copies, and the curve von Koch (similar to snowblower) is composed of four similar copies. Iterate (repeate) function can be used to produce complex images. An importen element for understanding the construction of fraktals is study β – expansions and we have to know word (string) theory for that. An alphabet is a finite set of symbols (letters). On alphabet A a finite or infinite word over A is a finite sequence of letters in A . It is convenient to write a word as $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in A$, expresssing u as the concatenation of the letters a_i . Pisot and Salem numbers had play an important role to different subject of harmonic analysis, automata theory, dynamical systems, ergodic theory in development of such theories. There are many articles explain the connection between *beta-expansion* and Pisot number. The Fibonacci numbers , give us the generation of morphological models for plants that came mathematically. A large family of tiling that cover a plan can be constructed by the digit expansion in base β (where β is non integer real number $\beta > 1$). The connectedness of Pisot dual tiling's play an important role in the study of, substitution and symbolic dynamical system. Definition of Pisot numbers and information on the set of that numbers it is illustrate on this thesis and different examples explanit what we present . In the third chapter we present the topological properties of fractals from the beta-pisot , giving some classifications for the cases of various degree. The case of Pisot nubers at degree 4, $x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ is a case that generetet disconnected fractals tiles. And the last chapter links the fractals to the field of medicine. Assuming that the self-similarity is the major characteristic of an object fractal, Jayalalitha G. et all. (2008) studied the blood flow in the cardiovascular system - vascular, proposing a biological model of self-similar structure woody stem. In the end we give some work conclusions on this topic.

Keywords: Fractals geometry, tiling iterate function , algebraic numbers, Pisot numbers,

β – expansion, hausdorf dimension, self-similarity, quasyristal ,greedy and lazy expansions.

Mirënjohje

Faleminderimi im i parë shkon udhëheqëses së këtij punimi Prof. Dr. Nertila Gjini për mbështetjen e pakursyer për mbylljen e disertacionit të doktoraturës. Unë i jam mirënjohës për të gjitha përpjekjet e saj për të më ndihmuar për të sfiduar dhe përmirësuar vazhdimisht veten time. Në veçanti, e falenderoj për dijen e pashtershme dhe të pakursyer që shpërndan, si dhe besimin e treguar për të më dhënë një studim të tillë i cili më mësoi mjaft mbi gjeometrinë e fraktaleve ku çdo gjë që na rrethon sillet ndërmjet kaosit dhe fraktaleve, forma jo të rregullta dhe ndonjëherë të çuditëshme. Në aspektin personal dua të falenderoj familjen time bashkëshorten Kaçe dhe vajzën Alesja, si dhe dy prindërit e mi të mrekullueshëm Livan dhe Shahe që asnjëherë nuk reshtën së nxituri për të studiuar. Ata kanë qenë të palodhur në mbështetjen dhe mirësinë e tyre gjatë hulumtimit tim dhe përgatitjes së kësaj teze. Një falenderim i veçantë shkon për Prof. Roland Zisi, rektori i Universiteti “Ismail Qemali” Vlorë” për përkushtimin e tij për të kurorëzuar mbylljen me ngritjen e komisionin e dhënies së titujve, dhe jo më pak për ish rektorin Prof. Albert Qarri që na mundësoi hapjen e shkollës së doktoraturës në Universitetin “Ismail Qemali” Vlorë”. Dëshiroj të falenderoj komisionin e dhënis së titujve pranë Fakultetit të Shkencave Teknike në Universitetin “Ismail Qemali” Vlorë” dhe kryetarin e këtij komisioni Prof. as Hajdar Kiço për punën e pakursyer që proçesi të mbyllej me sukses.

Do të doja gjithashtu të falenderoj Prof. as Llambrini Sota si drejtues e departamenti të matematikës për gadishmërinë e saj. Do të doja gjithashtu të falënderoj të gjithë anëtarët e Departamentit të Matematikës dhe të gjithë kolegët e mi me të cilët kemi pasur diskutime interesante, prandaj jam mirënjohës për kohën që kemi ndarë, atmosferën midis kolegëve të doktoraturës në departament dhe jashtë saj. Nuk mund të lë pa falënderuar profesorët e nderuar Prof. Llukan Puka, Prof. Kristaq Filipi, Prof. Agron Tato, Prof. Fatmir Hoxha, Prof. Ligor Nikolla që mundësuan mbylljen me sukses të përgatitjes teorike në shkollën e doktoraturës. Për vajzën Alesja që gjatë kësaj periudhe, nuk munda t’i jap kohën dhe vëmendjen e merituar. Një falenderim edhe për mësuesin e Gjuhës Shqipe, i nderuari Fatos Hoxha për durimin e kalimit të materialit për të eliminuar sa më shumë gabimet gjuhësore.

Ju Faleminderit !

Figurat tabela diagrama

1. Figura 1 . Një program i shkurtër për fierin	faqe 4
2. Figura 2. Vija Von Koch	faqe 5
3. Tabela 1 Gjatësia teorike e vijës Koch	faqe 5
4. Figur 3. Bashkësia e Kantorit	faqe 6
5. Figura 1. 4. Rruzuj të mbyllur sipas largesave d_1, d në $\mathbb{R}^2$	faqe 8
6. Figura 1. 5. Pikat limite	faqe 15
7. Figura 2 6 . Monidi A^* i ndërtuar në alfabetin $A = \{0,1\}$,	faqe 21
8. Tabela 2 Fjalë me gjatësi tëndrushme në një afabet	faqe 23
9. Figura 2.7 . Faktorë të ndryshëm për fjalët	faqe 24
10. Figura 2.8 .Llojet e mbivendosjes	faqe 24
11. Figura 3.9 Funksioni përsëritës për zbërthimet greedy	faqe 33
12. Figura 3. 10 Funksioni përsëritës për zbërthimet lazy	faqe 34
13. Figura 3.11. Klasifikimi i numrave Parri(Parry)	faqe 44
14. Figura 12. Numri Pisot 1. 3803...	faqe 53
15. Figura 13 .Numri Salem 1.2806....	faqe 53
16. Figura 3. 14. Razy Fraktal	faqe 62
17. Figura 3.15. Dy mënyra mbulimi i planit nga fraktalet Razy	faqe 63
18. Figura 3. 16. Struktura e tribonaçi Fraktale	faqe 63
19. Figura 3.17. Rrënjët e polinom i fuqis 4	faqe 64
20. Figura 18. Fraktal i palidhur i fuqisë 4 [kodi Ne Shtojcë]	faqe 65
21. Figura 4.19. Qeliza Purkinje	faqe 69
22. Figura 4.20. Një skemë diagrame e enëve të gjakut	faqe 70
23. Figura 20. Diagrame Sattistikore e enëve të gjakut	faqe 73
24. Tabela 3 Numri mesatar i enëve të gjakut në një grup kafshësh	faqe 74

PËRMBAJTJA

Hyrje	2
Kapitulli i I Koncepte bazë topologjike	7
1.1 – Koncepte topologjike	7
1.2 – Kompaktësia	13
Kapitulli II Struktura e fjalëve nga një alfabet	18
2.1 – Fjalët (String)	19
2.2 – Fjalët e pafundme	24
Kapitulli III Vetite topologjike të fraktaleve nga zbërthimit në bazë numër Pisot	29
3– Zbërthimet – beta	29
3.1 - Zbërthimet Greedy dhe Lazy	32
3.1.1- Algoritmet dhe zbërthimi greedy.	35
3.2- Zbërthimi për beta, numër Pisot dhe Salem	36
3.3 – Historiku mbi numrat Pisot	39
3.4 – Numrat algjebrik	42
3.4.1 - Numrat Pisot, numrat Salem dhe numrat Perron	44
3.5 -Algjebrikët e plotë të klasës S	46
3.6 -Karakteristikat e numrave të klasës S	47
3.7- Struktura topologjike e tiling të përfituar nga Pisotë të ndryshëm	57
3.8- Sistemi i numërimit Pisot dhe self-similar planar tiling	59
3.8.1- Klasifikimi i numrave Pisot të fuqisë së tretë .	60
3.8.2- Lidhshmëria në Pisotët e fuqisë së tretë e të katër.	61
Kapitulli IV Zbatimi Fraktaleve në mjeksi	
4 - Përdorimet e Sistemeve Fraktale në Mjeksi	67
4.1 – Strukturat biologjike dhe fraktalet	67
4.2 – Diskutime	68
4.3 - Konkluzione dhe Rekomandime	75
Përfundime dhe probleme të hapura	76
Bibliografia	77
Shtojcan	81

Hyrje

Gjeometria e fraktaleve është një nga degët e matematikës, e lindur nga nevoja për të përshkruar dhe interpretuar disa forma të veçanta të pranishme të natyrës, të cilat janë larg figurave të rregullta të përfaqësuara nga gjeometria Euklidiane. Sistemi biologjik nuk mund të përcaktohet me anë të gjeometrisë Euklidiane klasike si rezultat i parregullsive që paraqesin. Sistemet biologjike janë kryesisht të parregullta, komplekse dhe jolineare [1].

Retë nuk janë në formë të një trupi të rregullt, malet nuk janë në formë konike dhe rrufetë nuk shkarkohen në vija të drejta. Për të kapërcyer këto kufizime të gjeometrisë Euklidiane, Mandelbrot, për herë të parë, formalizoi konceptin e gjeometrisë fraktale. Gjeometria fraktale na dha një mënyrë të re që të vrojtojmë natyrën dhe të studiojmë format e parregullta në natyrë. Mandelbrot prezantoi termin gjeometria fraktale dhe u përpoq të shpjegojë sjelljen e kaosit në natyrë bazuar në këto koncepte [2 , 80, 81].

Gjeometria fraktale është një nga mjetet e rëndësishme për të shpjeguar gjeometrinë e vërtetë të natyrës. Trupi i njeriut është shembulli më i mirë i gjeometrisë fraktale. Mushkëritë, truri dhe sistemi i enëve të gjakut te trupi i njeriut paraqesin të gjitha fraktale.

Pema bronkiale dhe bronket e saj është fraktal. Në mënyrë të ngjashme organizimi anatomik i organit më misterioz të trupit tonë, truri, është gjithashtu një fraktal.[4] Fraktalet janë një gjuhë e re e fuqishme matematikore, në sajë të së cilës mund të përshkruajmë fenomene natyrore dhe të japim zgjidhjen e problemeve të realitetit të diskutuara për shumë kohë dhe nuk kemi arritur të marrim përgjigje bazuar në konceptet e matematikës klasike Euklidiane.

Shtrohet pyetja: çfarë janë fraktalet? Në lidhje me këtë kujtomë një metaforë të Falconer, që shkon dhe është shumë e përshtatshme për fraktalet: "Përkufizimi i fraktaleve duhet të trajtohet në të njëjtën mënyrë se si biologët e trajtojnë nocionin për jetën [5]".

Në të vërtetë nuk ka asnjë përkufizim për jetën, por vetëm një listë të vetive që e karakterizojnë një qenie të gjallë, si aftësia për të riprodhuar dhe lëvizur dhe mjaft elementë të tjerë. Shumë qenie të gjalla kanë më shumë karakteristika, se sa janë në listë. Shumë të tjerë kanë përjashtime. Në mënyrë të ngjashme për të identifikuar një fraktal, përdorim një listë të vetive themelore që i karakterizon.

Ky është një koncept matematik i ri që përdoret edhe ndihmën e kompjuterit për t'i dhënë përgjigje problemeve që ndërton. Funksioni interaktiv(përsëritës) mund të përdoret për të prodhuar imazhe komplekse. Fraktalet janë të përbërë nga pjesë që janë të ngjashme me të gjithën. Për shembull, bashkësia e Cantorit (Figura 2) është bashkimi i

dy kopjeve të ngjashme, kurba Von Koch është i përbërë nga katër kopje të ngjashme, si dhe bashkimi i tre kopjeve të saj që ngjajnë me flokun e borës (Figura 1) [3].

Këto ngjashmëri të pjesës me të tërën nuk janë vetëm veti e fraktaleve; ato, në të vërtetë, përdoren për të pëncaktuar një fraktal. Sistemet përsëritëse e bëjnë këtë në një mënyrë unike dhe zakonisht na mundësojnë një mënyrë të thjeshtë për gjetjen e dimensionit matematik të tyre.

Vargu i Fibonaccit, përdoret për gjenerimin e modeleve morfologjike për bimët. Një familje e gjerë e tiling të ngjashëm në plan mund të ndërtohen nga shifrat e zërthimit në bazë β , ku β është një numër jo i plotë dhe rrënjë e polinomeve me koeficientë të plotë.

Njihen paraqitjet e numrit në baza të ndryshme që nga lashtësia: Sumerianët dhe Babilonasit përdornin bazën 60, Maya përdornin bazën 20 të shkrimit të numrit. Al-Khwarizmi pati një kontribut të rëndësishëm në matematikë duke futur përdorimin e sistemit të shkrimit Hindu sistemi (1 - 9 dhe 0) dhe Hindu – Arab sistemi me bazë 10 që përdoret në jetën e përditshme dhe sot. [6] Për zërthimin e numrit me bazë të plotë në punimet e tij R'enyi në 1957, ishte i pari i cili paraqiti shkrimin në bazë jonumër të plotë. Ai studioi zërthimin β nga këndvështrimi dinamik.[7, 83]

Shumë autorë, duke punuar në zërthimin me bazë një numër jo të plotë, kanë gjetur lidhje midis disa fushave matematike nga kombinatorika, sistemet dinamike, topologjia, teoria e numrit, teoria ergotike.

Qëllimi kryesor i punimit është studimi i strukturës topologjike të tilings të gjeneruar nga numrat Pisot dhe numrat Pisot unitar.

Disa fakte dalin nga studimi i vetive topologjike të këtyre fraktaleve si [9,41,35]

1. çdo tiling është e barabartë me mbylljen e brendësisë së vet tiling,
2. kufiri i çdo tiling është kudo i ngjeshur.

Funksionet përsëritëse, shembull gjeometrik.

Vargu i fibonaçit gjeneron pemëm matematikisht



```
BarnsleyFern  
  
BarnsleyFern [{x_,y_}] := Module[{  
  i = RandomInteger[{1, 100}];  
  if [ i <= 1 , {xt = 0 , yt = 0.16*y} ,  
    if [i <= 8 , {xt = 0.2*x - 0.26*y , yt = 0.23*x +  
      0.22*y+1.6} ,  
      if [i <= 15 , {xt = -0.15*x + 0.28*y , yt = 0.26*x  
        + 0.24*y+0.44} ,  
        { xt = 0.85*x + 0.04*y , yt = -0.04*x +  
          0.85*y+1.6}]]];  
  { xt ,yt } ] ;  
Points = NestList [BarnsleyFern, {0 , 0} , 100000  
];  
Show [ Graphics [ { Hue [ . 35, 1, .7] , PointSize [ .  
001] , Point [ # ] & /@ Points} ] ]
```

Figura 1 Një program i shkurtër për fierin

Shohim shembullin e vijës Von Koch. Marrim një segment me gjatësi një njësi, e ndajme atë në tre pjesë, hiqet segmenti i mesit që zëvendësohet me brinjët e një trekëndëshi barabrinjës me brinjë me gjatësi sa segmenti i hequr.[8]

Ky proces vazhdohet në mënyrë të njëjtë për katër segmentet e fituara, ku çdo herë segmenti i mesit zëvendësohet me brinjët e një trekëndëshi barabrinjës me brinjë me gjatësi sa segmenti i hequr. Ajo u prezantua nga Von Koch si një shembull i "vijës së vazhdueshme jotë lëmuar(nuk ka tangente në çdo pikë të saj), të fituara nga një ndërtim gjeometrik elementar"; kjo vijë paraqet gjithashtu paradoksin e të qenit gjatësi të pafundme, ndonëse kufizohet dhe pa pikë asimptotike. [79] Gjatësia e kurbës së përafërt në çdo hap është gjatësia fillestare shumëzuar me $(4/3)^n$ për një gjatësi prej 1 cm, kurba në hapin 40 është tashmë 1 km e gjatë!

Por kjo është vetëm teorike, pasi nuk mund të shkojmë përtej disa hapave për shkak të zhdërvjelltësisë së vijës. Ndërsa vazhdon procesi, vija bëhet më e zhdërvjelltë edhe pse

gjatësia rritet, ndërsa gjometrikisht nga pika e fillimit deri te pika e fundit, mbetet e njëjtë largesa, kështu që gjatësia teorike e saj :

$$L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Dhe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \right] = \infty$$

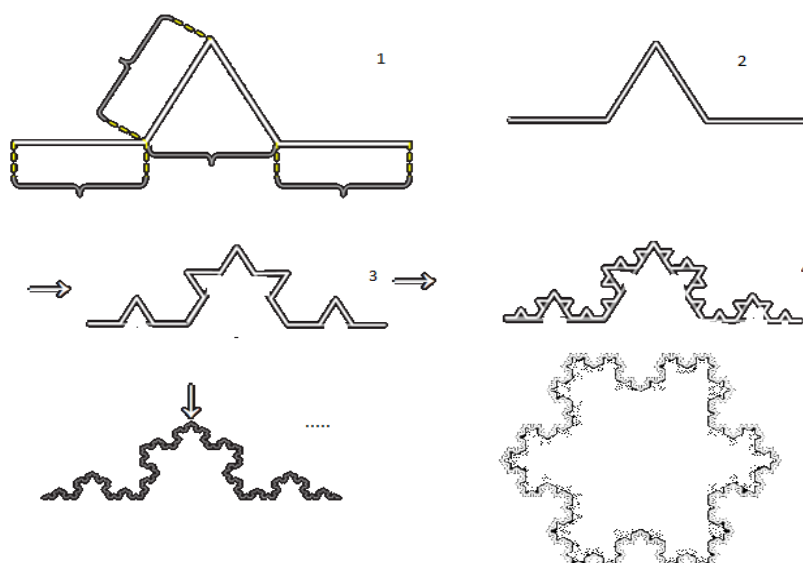


Figura 2. Vija Von Koch

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_n (cm)	1,33	1,77	2,37	3,16	4,21	5,61	7,49	9,98	13,31	17,75
N	20	40	41	N		41	100			
L_n (cm)	315,33	99437,33	132583,11	L_n (km)		1,32	23384868,08			

I ngjashëm është edhe rasti i bashkësisë së Cantorit ku, pas çdo hapi, largohet segmenti i mesit me gjatësi sa $\frac{1}{3}$ e gjatësisë së segmentit të dhënë.



Figur 3. Bashkësia e Kantorit

Në çdo hap ne marrim zëvendësimin me 2, 4, 8, 16, ... kopje të barabarta secila me një të tretën e gjatësisë fillestare, duke filluar nga hapi i dytë.

Punimi është i ndarë në këto pjesë: hyrja dhe katër kapituj dhe, në fund, konkluzionet dhe bibliografia e përdorur.

Në kapitullin e parë do të japin disa koncepte teorike nga topologjia që do të na ndihmojnë për të kuptuar më mirë natyrën topologjike të fraktaleve që përfitohen si rezultat i zërthimeve me një bazë jo numër i plotë.

Në kapitullin e dytë do të japim konceptet që janë të lidhura me teorinë e fjalëve (string) që na ndihmojnë që zërthimet në bazën Beta –Pisot t'i klasifikojmë sipas renditjes leksikografike.

Në kapitullin e tretë paraqesim vetitë topologjike të fraktaleve që përfitohen nga zërthimet Beta-Pisot, duke dhënë dhe disa klasifikime për rastet e Pisotëve të fuqive të ndryshme. Këtu paraqesim dhe rastin e një numri Pisot, rrënjë e një polinomi të fuqisë së katërt, ku fraktali i përfutur është rasti i një fraktali të palidhur, gjë që natyra e zërthimit nuk të çon ta mendosh të tillë.

Dhe në kapitullin e fundit, japim një punim mbi lidhjen e fraktaleve me fushën e mjeksisë. Në mbyllje; disa konkluzione të punës në këtë temë dhe referencat.

Kapitulli i pare

1. 1Koncepte bazë topologjike

Në këtë pjesë do të japim disa njohuri teorike mbi Hapësirat metrike dhe topologjike. Koncepte të Hapësirave të lidhura apo të mbylljes , kufirit të një bashkësie. Disa koncepte themelore topologjike , ku struktura e ndërtuar gëzon.

Përkufizim 1. 1.[10, 11, 42] . Një çift i renditur (X, d) , ku X është një bashkësi joboshe dhe d është funksioni i $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, ku $\mathbb{R}^+$ është bashkësia e numrave realë jonegativë, do të quhet *hapësirë metrike*, në qoftë se ky funksion i përcaktuar në $X \times X$ plotëson kushtet:

1. $d(x, y) \geq 0$ për çdo $x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ për çdo $x, y \in X$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ për çdo $x, y, z \in X$

[Një shënim me i saktë për hapësirën metrike do të ishte: $(X, d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+)$.]

Shembull 1.

Le të jetë $X = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in A\}$ bashkësia e fjalëve me n shkronja nga alfabeti me k karaktere $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Përcaktojmë distancën $d(x, y)$ ndërmjet dy fjalëve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dhe $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ të barabartë me numrin e vendeve me shkronja të ndryshme në këto dy fjalë $d(x, y) = \# \{i | x_i \neq y_i\}$. Çifti (X, d) është hapësirë metrike.

Teoremë 1. 2[11]. $(\mathbb{R}^n, d)$ është një hapësirë metrike ku d është funksion i përcaktuar si:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2};$$

Për $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Teoremë 1.3 [11, 42, VSH] Le të jetë (X, d) një hapësirë metrike dhe k një numer real pozitiv. Atëherë (X, d_k) është një hapësirë metrike ku funksioni d_k do të jepet si:

$$d_k(x, y) = k d(x, y) \text{ ku } x, y \in X.$$

Shembull 2.

Në Hapësirat metrike $(\mathbb{R}^2, d_1)$ dhe $(\mathbb{R}^2, d)$. Ndërtojmë bashkësin M e të gjitha pikave x të tilla që $d_1(x, a) \leq 1$ për një pike $a \in \mathbb{R}^2$. Ku kjo bashkësi është një katror me qendër në pikën a dhe gjatësi brinje 2 njësi. Në $(\mathbb{R}^2, d)$ bashkësia e të gjithave pikave x të tilla që $d(x, a) \leq 1$ është një rreth me rreze 1 njësi dhe qendër në pikën $a \in \mathbb{R}^2$; ku:

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_i - y_i|\} \\ 1 \leq i \leq 2$$

Dhe

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2} \text{ për } (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

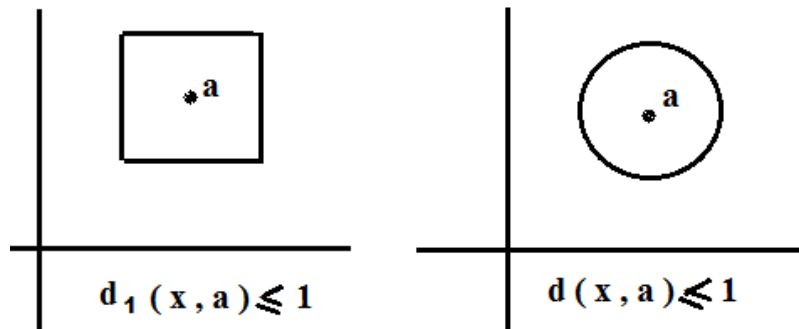


Figura 1. 4. Rruzuj të mbyllur sipas largesave d_1, d në $\mathbb{R}^2$

Përkufizim 1.4 [12, 42]. Le të jenë (X, d) dhe (Y, d_1) dy hapësira metrike dhe $a \in X$. Funksioni $f: X \rightarrow Y$ do të quhet i vazhdueshëm në pikën $a \in X$, në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$, ekziston $\delta > 0$, e tillë që $d_1(f(x), f(a)) < \varepsilon$ kudo që $d(x, a) < \delta$.

Përkufizim 1.5 [10, 66]. Le të jetë (X, d) një hapësirë metrike, $a \in X$ dhe $r > 0$. Bashkësia e të gjithë pikave $x \in X$ të tilla që $d(a, x) < r$ do të quhet rruzull i hapur me qendër a dhe rreze r dhe shënohet me $B(a, r)$, rruzull i mbyllur me qendër a dhe rreze r $\overline{B(a, r)}$ që është bashkësia e të gjithë pikave $x \in X$ të tilla që $d(a, x) \leq r$ dhe sfera me qendër a dhe rreze r , $S(a, r)$.

$$B(a, r) = \{x \in X | d(a, x) < r\},$$

$$\overline{B(a, r)} = \{x \in X | d(a, x) \leq r\},$$

$$S(a, r) = \{x \in X | d(a, x) = r\}$$

Përkufizim 1.6[10,11]. Le të jetë $(X; d)$ një hapësirë metrike dhe $a \in X$. Një bashkësi N e X , do të quhet fqinjësi e pikes a , në qoftë se ekziston një $r > 0$, e tillë që

$$B(a, r) \subset N.$$

Përkufizim 1.7 [10,11].. Një nënbashkësi U e një hapësirë metrike do të quhet e hapur, në qoftë se ajo është fqinjësi e çdo pike të saj.

$$\forall x \in U, \exists r > 0, B(x, r) \subseteq U$$

Përkufizim 1.8 . [10,11,42]. Një nënbashkësi e një hapsire metrike do të quhet e mbyllur, në qoftë se plotësi i saj në lidhje me bashkësinë ku kemi përcaktuar funksionin e largesës, është e hapur.

Përkufizim 1.9 . Le te jetë (X, d) hapësirë metrike dhe A nënbashkësi e X . Le te jetë $a \in X$. Largesë të pikës a nga bashkësia A do të shënojmë:

$$d(a, A) = \inf\{d(a, x) | x \in A\}$$

Përkufizim 1.10. [10, 66] Le të jetë X bashkësi jo boshe dhe koleksioni i nënbashkësive të X ,

$\mathcal{p}(X) = \{U | U \subseteq X\}$. Familja e nënbashkësive $\mathbb{T} \subset \mathcal{p}(X)$ quhet Topologji në X në qoftë se plotëson kushtet :

1. $X \in \mathbb{T}, \emptyset \in \mathbb{T}$
2. Në qoftë se $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathbb{T}$ atëherë $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathbb{T}$ ku $U_i \in \mathbb{T}$ për $i = 1 \dots n$
3. Në qoftë se për çdo $\alpha \in I$, $U_\alpha \in \mathbb{T}$, atëherë $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathbb{T}$

Çifti $(X, \mathbb{T})$ quhet hapësirë topologjike. Bashkësia X quhet bashkësi themelore dhe koleksioni $\mathbb{T}$ quhet *topologji në bashkësinë X* .

Vërtetohet që nga një hapësirë metrike mund të përftojmë një hapësirë topologjike, ku elementët e $\mathbb{T}$ janë bashkësitë e hapura të përcaktuara nga funksioni i largesës i hapësirës metrike. Por jo çdo hapësirë topologjike mund të metrizohet.

Shembull. 3

Bashkësia $X = \{a, b, c\}$ dhe $\mathbb{T}_1 = \{\emptyset, X\}$, $\mathbb{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}X\}$, $\mathbb{T}_3 = \{\emptyset, \{a, b\}X\}$, $\mathbb{T}_4 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}X\}$, $\mathbb{T}_5 = \{\emptyset, \{a, c\}, \{c, b\}, X\}$ Çiftet $(X, \mathbb{T}_i)$ janë hapësirë topologjike për $i = 1, 2, 3, 4$ dhe nuk është hapësirë topologjike për rastin e koleksionit $\mathbb{T}_5$.

Teoremë 1.11 [10, 42] Le të jetë $(X, \mathbb{T})$ hapësirë topologjike.

1. Për çdo pikë $x \in X$, ekziston të paktën një fqinjësi N e x .
2. Për çdo pikë $x \in X$ dhe çdo fqinjësi N të x , $x \in N$.
3. Për çdo pikë $x \in X$, në qoftë se bashkësia N është fqinjësi e x dhe $N \subset N'$, atëherë dhe bashkësia N' është fqinjësi e x .
4. Për çdo pikë $x \in X$ dhe çdo bashkësi N, M që janë fqinjësi të x , bashkësia $N \cap M$ është gjithashtu fqinjës e x .
5. Për çdo pikë $x \in X$ dhe çdo fqinjësi N të x , ekziston fqinjësia U e x e tillë që $U \subset N$ dhe bashkësia U është fqinjësi e çdo pike të saj.

Përkufizim 1.12. Le të jetë A nënbashkësi e hapësirës topologjike. Pika x thuhet se është në mbylljen e bashkësisë A , në qoftë se për çdo fqinjësi N të x , $N \cap A \neq \emptyset$. Mbyllja e bashkësisë A shënohet me $\bar{A}$.

Teoremë 1.13[12]. Në hapësirën topologjike $(X, \mathbb{T})$:

1. $\bar{\emptyset} = \emptyset$;
2. $\bar{X} = X$;
3. për çdo nënbashkësi A të X , $A \subset \bar{A}$;
4. për çdo nënbashkësi A, B të X , $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
5. për çdo nënbashkësi A të X , $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

Përkufizim 1.14. Jepet nënbashkësia A në hapësirën topologjike, pika x thuhet se është pikë e brendshme e bashkësisë A , në qoftë se bashkësia A është fqinjësi e x . Bashkësia e pikave të brendshme të bashkësisë A (ose brendësia) shënohet me $Int(A)$ ose dhe me A° .

Përkufizim 1.15 Jepet nënbashkësia A e hapësirës topologjike, pika x thuhet se është në kufirin e bashkësisë A , në qoftë se x është në mbylljen e bashkësisë A dhe në mbylljen e plotësit të bashkësisë A . Kufiri i A shënohet me $Bdry(A)$ ose $\partial A = \bar{A} \cap \overline{C(A)}$.

(Kujtojmë $A \cup C(A) = X$, $A \cap C(A) = \emptyset$)

Përkufizim 1.16 . Funksioni $f: (X, \mathbb{T}) \rightarrow (Y, \mathbb{T}')$ është i vazhdueshëm në pikën $a \in X$, në qoftë se për çdo fqinjësi N të $f(a)$, $f^{-1}(N)$, është fqinjësi e a . f thuhet të jetë i vazhdueshëm, në qoftë se është i vazhdueshëm në çdo pikë të bashkësisë X .

Përkufizimi 1.17[13] Hapësira (metrike, topologjike) X quhet e lidhur, në qoftë se nuk mund të paraqitet si bashkim i dy bashkësive joboshe, joprerëse dhe të hapura në X .

Nëse nuk ekzistojnë bashkësitë $A, B \subset X$ të tilla që $X = A \cup B$ dhe që:

- 1) $A \neq \emptyset$, 2) $B \neq \emptyset$ 3) Bashkësitë A, B janë të hapura në X .

Në rast të kundërt, kur në bashkësinë X gjendet një copëtim i hapur, atëherë Hapësira quhet hapësirë e palidhur (jo e lidhur).

Për dy pika x, y nga X themi që janë të lidhura, në qoftë se ekziston nënbashkësia e lidhur L në X që i përmban ato dy pika.

Teorema 1.18. [10,42] Hapësira topologjike X është e lidhur, atëherë dhe vetëm atëherë, kur çdo dy pika të saj janë të lidhura.

Vërtetim. Në qoftë se X është e lidhur, atëherë çdo dy pika të saj janë të lidhura. Anasjelltas, le të jenë çdo dy pika të hapësirës X të lidhura. Supozojmë të kundërtën; që X është e palidhur. Atëherë ekziston P në bashkësi e X që është dhe e hapur dhe e mbyllur në të njëjtën kohë (kuptohet që $P \neq X, P \neq \emptyset$). Le të jenë $x \in P$ dhe $y \in C(P)$. Meqenëse x e y janë të lidhura, ekziston bashkësia e lidhur (e hapur) $Q \subseteq X$ e tillë që $x, y \in Q$. Atëherë $x \in P \cap Q$ dhe $y \in C(P) \cap Q$ kështu që $Q \subset (P \cap Q) \cup (C(P) \cap Q)$ dhe $(P \cap Q) \cap (C(P) \cap Q) \subset C(Q)$. Shihet se $(P \cap Q) \cap (C(P) \cap Q) = \emptyset$. Ky fakt tregon që Q është e palidhur. Kjo tregon që supozimi ynë është i gabuar, kështu që X është e lidhur.

Përkufizim 1.19.[66] Hark që bashkon dy pika x dhe x të një hapësirë topologjike X do të quajmë funksionin e vazhdueshme $f : ([0, 1], \mathbb{T}_S) \rightarrow (X, \mathbb{T})$ e tillë që $f(0) = x$ dhe $f(1) = y$.

Përkufizimi 1.20 . Një hapësirë X është e lidhur sipas harqeve, në qoftë se për çdo dy pika të ndryshme $x, y \in X$ ka një hark që bashkon x me y .

Lema 1.21 [13,42]. Një hapësirë e lidhur sipas harqeve është e lidhur.

Vërtetimi: Supozojmë se X nuk është e lidhur. Atëherë ne gjejmë një bashkësi P në X që është dhe e hapur dhe e mbyllur në të njëjtën kohë. $P \subset X$. Por $P \neq X$ dhe $P \neq \emptyset$. Marrim një pikë $a \in P$ dhe një pikë $b \in C(P)$. Meqë X është e lidhur sipas harqeve gjëndet një hark që i bashkon pikat a dhe b të X , pra kemi funksion $f : [0, 1] \rightarrow X$ i vazhdueshëm që është një hark nga $f(0) = a$ në $f(1) = b$. $f^{-1}(P) \subset [0, 1]$ dhe $0 \in f^{-1}(P)$, $1 \notin f^{-1}(P)$. Por nga ana tjetër, meqë f është i vazhdueshëm, kemi $f^{-1}(P)$ dhe të hapur dhe të mbyllur. Ky fakt na çon në kontradiktën që intervali $[0, 1]$ është jo i lidhur.

Përkufizimi 1.22[10, 42] Një hapësirë X është e lidhur lokalisht, në qoftë se për çdo fqinjësi U të $x \in X$ ka një fqinjësi të lidhur V të x , që përfshihet në U . X është hapësirë lokalisht e lidhur, në qoftë se është lokalisht e lidhur në çdo pikë të saj. Nënbashkësia A e hapësirës X quhet lokalisht e lidhur, në qoftë se A si nënhapësirë e X , është lokalisht e lidhur.

Shembulli 4.

Hapësira Euklidiane $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, është hapësirë lokalisht e lidhur, sepse për çdo $x \in \mathbb{R}^n$ dhe çdo fqinjësi e hapur U të pikes x ekziston rruzulli i hapur $B(x, r) \subseteq U$ dhe $B(x, r)$ është bashkësi e lidhur (si bashkësi homeomorfe me n -kubin e hapur) në $\mathbb{R}^n$, siç dihet, është edhe hapësirë e lidhur. Po ashtu, për çdo $n \geq 0$ sfera S^n është hapësirë lokalisht e lidhur (ndërsa për $n \geq 1$ sfera S^n është edhe e lidhur).

Përkufizim 1.23 [10,42] Le të jetë X hapësirë topologjike dhe B nënbashkësi në X . Mbulimi $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ i B thuhet se është *mbulim i hapur* i B , në qoftë se për çdo $\alpha \in I$, A_α është nënbashkësi e hapur në X .

Përkufizim 1.24 Hapësira topologjike X thuhet se është *kompakte*, në qoftë se për çdo mbulim të hapur $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ të X , ekziston një nënmbulim i fundëm $(V_\beta)_{\beta \in J}$ i X .

$$X \subseteq \bigcup_{\beta \in J} (V_\beta) \subset \bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha)$$

Përfshirja

$$\bigcup_{\beta \in J} (V_\beta) \subset \bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha)$$

tregon që $\forall \beta \in J, \exists \alpha_i \in I$ e tillë që $V_\beta = U_{\alpha_i}$ dhe $J \subset I$, $|J| < \infty$ (bashkësia J e fundme)

Ne mund të përcaktojmë kompaktësinë nga thënia: "X është kompakte, në qoftë se për çdo mbulim të hapur $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ të X , kemi një nënbashkësi të fundme të indekseve $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ të tilla që koleksioni $U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$ është mbulim i X , kështu që kemi relacionin e mëposhtëm

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^n (U_{\alpha_i}) \subset \bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha)$$

Teoremë 1.25 [10]. Hapësira topologjike X është kompakte atëherë dhe vetëm atëherë kur për çdo $x \in X$, është dhënë fqinjësia N_x e x , ekziston një numër i fundëm pikash $x_1, x_2, \dots, x_n$ në X e tillë që:

$$X = \bigcup_{i=1}^n N_x.$$

Vërtetim. Supozoj se X është kompakte. Le të jetë dhënë për cdo $x \in X$ fqinjësia N_x e x . Për çdo x ekziston një bashkësi e hapur U_x , e tillë që $x \in U_x \subset N_x$ dhe, si pasojë, familja $(U_x)_{x \in X}$ është mbulim i hapur në X . Nga fakti që bashkësia X është kompakte, do të thotë që ekziston një nënmbulim i fundëm $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}$. Por $U_x \subset N_x$, për çdo i , prandaj $N_{x_1}, N_{x_2}, \dots, N_{x_n}$ mbulim në X . Anasjelltas, supozoj se, për çdo $x \in X$ ku fqinjësia N_x e x është e dhënë, ekziston një numër i fundëm pikash $x_1, x_2, \dots, x_n$ në X , e tillë që $X = \bigcup_{i=1}^n N_x$.

Le të jetë $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ mbulim i hapur në X . Atëherë për çdo $x \in X$ ekziston $\alpha = \alpha(x)$ e tillë që $x \in U_\alpha$ dhe më pas $N_x = U_\alpha$ është fqinjësi e x . Nga hipoteza jonë, kemi pikat $x_1, x_2, \dots, x_n$ në X të tilla që $N_{x_i} = U_{\alpha(x_i)}$, $i = 1, \dots, n$ mbulime në X , prandaj X është kompakte.

Jo çdo nënbashkësi e hapësirës kompakte është vetë kompakte. Dimë se segmenti $[0,1]$ është kompakt, kurse intervali i hapur $(0,1)$ nuk është kompakt. Që të tregojmë se $(0,1)$ nuk është kompakt, mjafton të gjejmë një mbulim të hapur në $(0,1)$ që nuk ka një nënmbulim të fundëm. Kështu që për çdo numër të plotë $n = 3, 4, 5, \dots$ le të jetë

$$U_n = \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right). \text{ Kemi } \left(\frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}\right) \supset \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \supset \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right) \supset \dots \supset \left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right) \supset \dots$$

atëherë $\bigcup (U_n) = (0,1)$ për $n = 3, 4, 5, \dots$. Kjo familje intervale bashkësi të hapura në $\mathbb{R}$ përbën një mbulim të hapur për $(0,1)$. Nga ana tjetër, për çdo numër të plotë $k > 3$, ne kemi $\frac{1}{k} \notin \bigcup_{n=3}^k U_n$. Kështu bashkimi i çdo nënkoleksioni të fundëm në (U_n) për $n = 3, 4, 5, \dots$ nuk përmban disa pika të $(0,1)$ dhe prandaj nuk ekziston një nënmbulim i fundëm nga (U_n) për $n = 3, 4, 5, \dots$

1.1 Hapësirat metrike kompakte

Hapësira metrike (X, d) thuhet se është kompakte, në qoftë se hapësira topologjike e përfshirë është kompakte. Në këtë pjesë ne do të shohim vetitë e hapësirave metrike

kompakte. Ku rezultati bazë është “hapësirë metrike është kompakte, atëherë dhe vetëm atëherë kur çdo nënbashkësi e pafundme e saj ka të paktën një ‘pikë limite’”

Përkufizim 1.1.26. Le të jetë X hapësirë topologjike dhe A nënbashkësi e X , pika $a \in X$ quhet pikë limite e A , në qoftë se çdo fqinjësi në A përmban pafundësisht pika të ndryshme në A .

Duke iu referuar pikave limite në bashkësinë A , ne duhet ta kemi vëmendjen te specifikat në cilën hapësirë topologjike A është konsideruar si nënbashkësi. Për shembull; në $\mathbb{R}$, nënbashkësia $A = (0, b)$ ka pikë limite 0, ndërsa në hapësirën topologjike $(0, +\infty)$, bashkësia e njëjtë A nuk e ka 0 pikë limite.

Një shembull i dytë në $\mathbb{R}$, nënbashkësia $B = [a, b)$ ka pikë limite çdo element të B , ndërsa në hapësirën topologjike $(-\infty, b)$, bashkësia B nuk ka pika limite b .

Le të shohim karakterizimin për pikën limite në hapësirën Hausdorff dhe, si pasojë edhe në hapësirën metrike, sepse kujtojmë që hapsirat metrike janë hapësira Hausdorff (për çdo dy pika a dhe b të bashkësisë ku përcaktojmë funksionin largesë, egzistojnë të hapurat $U \ni a$ dhe $V \ni b$ të tilla që $U \cap V = \emptyset$ që janë të ndara).

Lemë 1.1.27 [10] Le të jetë X hapësirë Hausdorff dhe A nënbashkësi në X . Pika $a \in X$ është pikë limite e A , atëherë dhe vetëm atëherë kur çdo fqinjësi e a përmban të paktën një pikë të A të ndryshme nga vetë a .

Vërtetim. Vërtetimi i konditës së nevojshme në lemën është e drejtpërdrejtë. Supozoj anasjelltas, se a nuk është pikë limite në A . Atëherë ekziston një fqinjësi N e a që përmban koleksionin e fundëm të pikave të A të ndryshme nga a . Për secilën nga këto pika a_i , $i = 1, \dots, p$ ne mund të gjejmë fqinjësitë U_i të a dhe fqinjësitë V_i të a_i , të tilla që $U_i \cap V_i = \emptyset$. Atëherë $N \cap U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_p$ është fqinjësi e a që nuk përmban pika në A përveç a . Vërtetimi i lemes tani është i plotë.

Nisur nga ky argument, nëse pika a është ose jo një pikë limite e nënbashkësisë A , nuk varet nga fakti nëse a është pikë e A . Në fakt kjo është një pasojë e drejtpërdrejtë në

përkufizimin e pikës limite a të nënbashkësisë A , kur a është pikë limite e A , atëherë dhe vetëm atëherë kur a është pikë limite e $A - \{a\}$. Në qoftë se N është fqinjësi e pikës a , nënbashkësia $N - \{a\}$ quhet **fqinjësi e fshirë** e pikës a .

Lema 1.1.27 tregon se në hapësirën Hausdorff pika a është pikë limite e nënbashkësisë A , atëherë dhe vetëm atëherë kur çdo fqinjësi e fshirë e a përmban një pikë në A . Kur pika b nuk është pikë limite e A , prandaj duhet të kemi fqinjësinë W , të tillë që $W \cap A = \{b\}$. Pika e tillë quhet **pikë e izoluar** e A .

Për hapësirën metrike funksioni distancë mund të përdoret në karakterizimin e pikave limite.

Lemë 1.1.28 [10]. Le të jetë A nënbashkësi e hapësirës metrike (X, d) . Pika $a \in X$ është pikë limite e A , atëherë dhe vetëm atëherë kur $d(a; A - \{a\}) = 0$.

Vërtetim. Në qoftë se $d(a; A - \{a\}) > 0$, atëherë duke zgjedhur ε të tillë që:

$$0 < \varepsilon < d(a; A - \{a\}),$$

$B(a; \varepsilon) \cap A$ është boshe ose $\{a\}$ dhe prandaj a nuk është një pikë limite në A . Anasjelltas, në qoftë se a nuk është pikë limite në A , atëherë ekziston një fqinjësi N dhe prandaj rruzulli i hapur $B(a; \varepsilon)$ nuk ka pika të përbashkëta në $A - \{a\}$. Kështu $d(a; A - \{a\}) \geq \varepsilon > 0$.

Shembull 5

Është dhënë bashkësia $A = (a, b) \cup \{c\}$. Pika c është afër me bashkësinë A . Për çdo $\delta > 0$, $\{c\} \subseteq (c - \delta, c + \delta) \cap A$, por c nuk është pikë limite e bashkësisë A , shohim që $(c - 0.05, c + 0.05) \cap A \setminus \{c\} = \emptyset$ kur $|c - b| > 2$

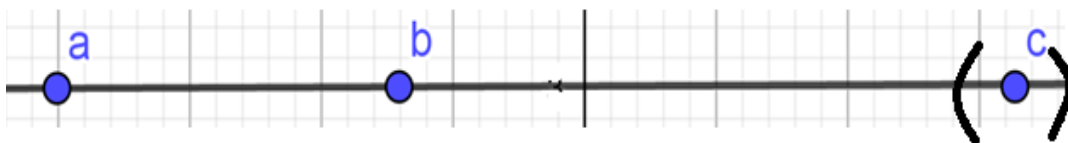


Figura 1. 5. Pikat limite

Pika limite është afër me bashkësinë, por edhe e rrethuar nga shumë pika të tjera të bashkësië.

Lemë 1.1.29 [10, 42] Le të jetë (X, d) hapsirë metrike e tillë që çdo nënbashkësi e pafundme në X ka të paktën një pikë limite në X . Atëherë, për çdo numër të plotë pozitiv n , ekziston një bashkësi e fundme e

pikave $x_1^n, x_2^n, \dots, x_p^n$ në X e tillë që koleksioni i rruzujve të hapur

$$B\left(x_1^n, \frac{1}{n}\right), B\left(x_2^n, \frac{1}{n}\right), \dots, B\left(x_p^n, \frac{1}{n}\right)$$

është mbulim për X .

Lemë 1.1.30 [10, 42, 68] Le të jetë (X, d) hapsirë metrike e tillë që çdo nënbashkësi e pafundme në X ka të paktën një pikë limite. Atëherë për çdo mbulim të hapur $(O_\alpha)_{\alpha \in I}$ në X ekziston një numër pozitiv ϵ i tillë që çdo rruzull i hapur $B(x; \epsilon)$ përmbahet në elementin O_β të këtij mbulimi.

Numri ϵ te lema 1.1.30 në përgjithësi varet nga mbulim i hapur $(O_\alpha)_{\alpha \in I}$. Jepet mbulimi i hapur $(O_\alpha)_{\alpha \in I}$, në qoftë se numri ϵ ka vetinë se për cdo $x \in X$, $B(x; \epsilon) \subset O_\beta$ për $\beta \in I$, atëherë çdo numër ϵ' i tillë që $0 < \epsilon' < \epsilon$ gjithashtu do të ketë këtë veti. Kufiri i sipërm, më i vogël në bashkësinë e numrave që kanë këtë veti quhet “numri i Lebegut *Lebesgue number*”, ϵ_L , për mbulimin e hapur $(O_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Rrjedhim 1.1.31 [10, 42] Le të jetë (X, d) hapsirë metrike e tillë që çdo nënbashkësi e pafundme në X ka një pikë limite. Atëherë çdo mbulim i hapur $(O_\alpha)_{\alpha \in I}$ në X ka “numrin Lebegut ϵ_L ”

Teoremë 1.1.32 [10, 42, 68] Le të jetë (X, d) hapsirë metrike që ka vetinë se çdo nënbashkësi e pafundme në X ka të paktën një pike limite, atëherë X është kompakte.

Vërtetim. Le të jetë $(O_\alpha)_{\alpha \in I}$ mbulim i hapur dhe ϵ_L numri Lebegue. Le të zgjedhim n , $\frac{1}{n} < \epsilon_L$. Nga lema 1.1.29 ekziston bashkësia e fundme $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ e pikave në X e tillë që rruzujt e hapur

$B\left(x_1, \frac{1}{n}\right), B\left(x_2, \frac{1}{n}\right), \dots, B\left(x_p, \frac{1}{n}\right)$ mbulojnë X . Me tej, nga lema 5.6 për cdo $i = 1, \dots, p$, ekziston $\beta_i \in I$ e tillë që $B\left(x_i, \frac{1}{n}\right) \subset O_{\beta_i}$. Kjo tregon që koleksioni $O_{\beta_1}, O_{\beta_2}, \dots, O_{\beta_p}$ është nënmbulim i fundëm i mbulimit $(O_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Teoremë 1.1.33[10, 42] Le të jetë (X, d) hapsirë metrike. Çdo nënbashkësi e pafundme X ka të paktën një pike limite atëherë dhe vetëm atëherë kur X është kompakte.

Duke qënë se kemi provuar se nënhapsira X e hapsirës Euklidiane $\mathbb{R}^n$ është kompakte atëherë dhe vetëm atëherë kur ajo është e mbyllur dhe e kufizuar, ne mund të themi:

Rrjedhim 1.1.34[10, 42] Le të jetë X nënhapsirë e $\mathbb{R}^n$. Atëherë tre vetitë e mëposhtme janë ekuivalente.

- 1) X është kompakte.
- 2) X është e mbyllur dhe e kufizuar.
- 3) Çdo nënbashkësi e pafundme në X ka të paktën një pikë limite në X .

Kapitulli II

STRUKTURA E FJALËVË NGA NJË ALFABET

Hyrje

Përkufizim 2.1[14, 15] Veprimi dysh mbi bashkësin G quhet çdo pasqyrim

$$*: G \times G \rightarrow G$$

Është i përshtatshëm për këtë veprim që të quhet shumëzim në bashkësinë G dhe veprimin për elementet $x, y \in G$, prodhim dhe zakonisht shënohet me xy . Në qoftë se ky veprim është shoqërues, që do të thotë: $\forall x, y, z \in G, (xy)z = x(yz)$, atëherë struktura algjebrike e dhënë $(G, *)$ është gjysmëgrup. Nëse ky veprim dysh ka elemente asnjënjës, që do të thotë: $\exists \varepsilon \in G, \varepsilon x = x\varepsilon = x, \forall x \in G$, atëherë struktura algjebrike e dhënë $(G, *)$ është monoid. Nëse ky veprim dysh ka për çdo element të anasjelltë, që do të thotë: $\forall x \in G, \exists y \in G, xy = \varepsilon = yx$, atëherë struktura algjebrike e dhënë $(G, *)$ është grup. Bashkësia e fjalëve nga një alfabet i caktuar është gjysmëgrup dhe veprimi i përcaktuar në këtë bashkësi është vendosja e fjalëve njëra pas tjetrës. [16]

Një nëngjysmëgrup është një bashkësi mbyllur në lidhje me veprimin e përcaktuar nëngjysmëgrup. Një morfizëm nga një gjysmëgrup S në një gjysmëgrup T është funksioni:

$$f: S \rightarrow T, \text{ i tillë që } f(uv) = f(u)f(v) \text{ për çdo } u, v \in S$$

Një monoid M është një gjysmëgrup me elemente asnjënjës, pra një element ε e tillë që $m\varepsilon = \varepsilon m = m$ për çdo $m \in M$. Një morfizëm i një monoidi M në N është një morfizëm i gjysmëgrupit të tilla që $f(\varepsilon_M) = \varepsilon_N$.

Për gjysmëgrupet S dhe T , bashkësia $S \times T$ e shoqëruar me veprimin e përcaktuar në gjysmëgrup duke vendosur $(s, t)(s', t') = (ss', tt')$ është gjysmëgrupi prodhim i gjysmëgrupeve S dhe T . [16] Le të jenë X dhe Y dy nënbashkësi të një gjysmëgrupi S . Prodhimi i bashkësive X dhe Y është bashkësia:

$$XY = \{xy | x \in X, y \in Y\}$$

Për bashkësinë e dhënë $X \subset S$ shënojmë me X^+ nëngjysmëgrupin i përfuar nga:

$$X^+ = \{x_1 \cdots x_n | n \geq 1, \quad x_i \in X\}$$

Veprimi që lidh $X \mapsto X^+$ quhet veprimi i mbledhjes. Ky veprimi njësh nuk duhet të ngatërrohet me bashkimin (veprim dysh) në copëtimin e dy bashkësive. Nëse S është një monoid, ne përcaktojnë:

$$X^* = X \cup \{\varepsilon\}$$

i cili është nënmonoidi i gjeneruar nga X . Veprimi që lidh $X \mapsto X^*$ quhet veprimi yll.

Një nënbashkësi X i një gjysmëgrupi S është racional, nëse mund të merret nga nënbashkësi të fundme të S nga një numër i fundëm veprimesh të bashkimit, prodhimit dhe mbledhjes.

Në një monoid M , familja e bashkësive racionale është e mbyllur për veprimin

yll të përcaktuar më sipër. Në fakt, kjo familje është gjeneruar nga veprimet e bashkimit, prodhimit dhe mbledhjes, sepse:

$$X^+ = XX^*$$

Një rast i veçantë meriton të përmendet. Një nënbashkësi racionale i një prodhimi gjysmëgrupi, quhet një lidhje racionale.[17]

Për çdo bashkësi X , nëse marrim bashkësinë e nënbashkësive të prodhimit kartezian të X me vetveten $2^{X \times X}$ formon një monoid. Relacioni identik $\{(x, y) \text{ ku } x = y\}$ është elementi asnjnjës. Bashkësia e funksioneve nga X në X është një nënmonoid i $2^{X \times X}$. Bashkësia e përkëmbimeve në X është një nënmonoid për monoidin e funksioneve.

2.1 Fjalët

Japim në fillim kuptimin për fjalët e fundme. Le të marrim një bashkësi A bashkësinë e alfabetit. Elementet e kësaj bashkësie i quajmë shkronja. Kjo bashkësi, në përgjithsi, është e fundme edhe pse ky fakt nuk është i domosdoshëm. Shënojmë me A^* bashkësinë e

fjalëve nga alfabeti A dhe fjalën boshe që e shënojmë me ε . Një fjalë nga alfabeti A është vargu i fundëm i elementeve nga A :

$$u = (a_1, a_2, \dots, a_n), a_i \in A$$

Për një fjalë $u \in A^*$ shënojmë me $|u|$ gjatësinë e fjalës u e përcaktuar nga numri i shkronjave nga ky alfabet në këtë fjalë. Marrim dhe $A^+ = A^* - \{\varepsilon\}$

Bashkësia e fjalëve A^* nga alfabeti A formon një monoid.[16,17] Veprimi dysh që përcaktohet është fjalë , kjo fjalë merret nga vendosja në varg të dy fjalëve në veprim:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n)$$

Ky veprim dysh është shoqërues, që lejon shkrimin e një fjale si $a_1, a_2, \dots, a_n$, në vend të $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Ky veprim ka vetinë e shoqërimit dhe fjala boshe është elementi asnjnjës për fjalët. Bashkësia A^+ quhet gjysmëgrup i lirë dhe A^* quhet monoid i lirë. Një fjalë v quhet faktor (parashtesë (prefix) apo prapashtesë (suffix)) për fjalën u , në qoftë se gjenden fjalët x, y të tilla që , $u = xvy$ (parashtesë $u = vy$, prapashtesë $u = xv$). Fjala $u = u_0 \dots u_{n-1}$ e një gjatësie n ka gjithsej $n + 1$ parashtesa : $\varepsilon, u_0, u_0u_1, \dots, u_0 \dots u_{n-1}$, u e njëjta gjë është e vërtetë edhe për prapashtesën.

Shohim fjalët në alfabetin $A = \{0,1\}$. Ne mund të shkruajmë fjalë të gjatësive të ndryshme nga ky alfabet.[43] Shënojmë me A^k bashkësinë e fjalëve me gjatësinë k . Vëmë re që $A^0 = \{\varepsilon\}$ është e vetmja fjalë me gjatësi 0.

Për alfabetin $A = \{0, 1\}$, kemi $A^0 = \{\varepsilon\}$, $A^1 = \{0, 1\}$, $A^2 = \{00, 01, 10, 11\}$,

$A^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ dhe vazhdon për fjalë në gjatësi të tjera.

Bashkësia e të gjitha fjalëve nga një alfabet janë fjalë me gjatësi të ndryshme:

$$A^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}.$$

Në disa raste na duhet ta përjashtojmë fjalën me gjatësi 0 dhe bashkësia e fjalëve me gjatësi të ndryshme nga zero, shënohet me A^+ . Kemi njëvlershmërinë e mëposhtme:

$$A^+ = A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots$$

$$A^* = A^+ \cup \{\varepsilon\}$$

Figura 6 na paraqet monoidin A^* . Kulmet paraqesin elementet e A^* (fjalët). Rrënja është fjala boshe ε . Fjalët që dalin nga nyja u janë fjalët, ua ku $a \in A$. Çdo fjalë u shihet si kalim nga fjala boshe te nyja u . [18] Fjala e kthyer (mbrapash) e një fjale $u = a_1, a_2, \dots, a_n$, ku $a_i \in A$ janë shkronja, është fjala $\tilde{u} = a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$. Fjala është periodike, në qoftë se ekziston numri i plotë $p \geq 1$ dhe p quhet perioda e fjalës $u = a_1, a_2, \dots, a_n$, ku $a_i \in A$ dhe $a_i = a_{i+p}$ për $i = 1, \dots, n - p$ që është numri më i vogël që plotëson këtë kusht. Fuqia e n -të e një fjale $u^n = uu \dots u$ pra n fjalë u njëra pas tjetrës. $u^1 = u$ dhe $u^0 = \varepsilon$, $\varepsilon^n = \varepsilon$, sepse ε është njëshi për veprimin e përcaktuar në monoidin A^* . Fuqia e n -të e një fjale kënaq dhe relacionin $u^0 \cdot u^n = u^{0+n} = u^n$. Për shembull: $u = aba$, një fjalë nga alfabeti $A = \{a, b\}$, $u^3 = abaabaaba$, $babababa = (ba)^4 = (baba)^2$, $(ba)^0 = \varepsilon$.

Për fuqin e n -të e një fjale është i vërtetë dhe relacioni $u^m \cdot u^n = u^{m+n}$, ku $m, n \geq 0$.

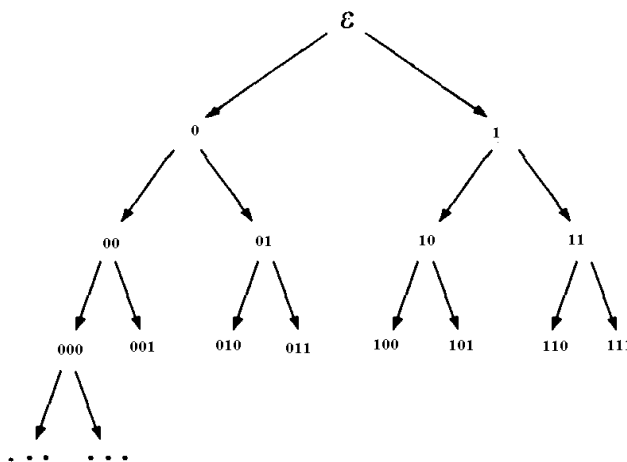


Figura 2 6 . Monidi A^* i ndërtuar në alfabetin $A = \{0,1\}$,

Le të jenë dhënë dy fjalë (strigs) $u = a_1, a_2, \dots, a_n$, $v = b_1, b_2, \dots, b_m$, ku a_i, b_j , janë shkronja (simbole). Fjalët u dhe v janë të barabarta, atëherë dhe vetëm atëherë kur:

i) $n = m$ dhe ii) $a_i = b_i$ për çdo $i = 1, \dots, n$ për shëmbull: $ab \neq aba$ dhe $baab \neq abab$, kurse $100101 = 100101$

Për fjalët përdoren tre relacione renditjeje në të shumtën e rasteve.

Renditja parashtesë shënohet si $u \leq v$, në qoftë se u është parashtesë e v , për shëmbull: **$ab \leq abaab$**

Renditja radiale (radix order) e përcaktuar në një alfabet të renditur. $u \leq v$, në qoftë se $|u| < |v|$ ose $|u| = |v|$ dhe $u = xau'$ dhe $v = xbv'$ ku a, b janë shkronja të tilla që $a \leq b$. Për shëmbull në alfabetin $A = \{0, 1\}$, kemi $101 \leq 1010$ sipas renditjes radiale, gjithashtu $1010 \leq 1011$. Në paraqitjen e numrave të plotë në një bazë k duke përjashtuar fillimin me zeron, renditja radiale e paraqitjes së tyre është renditja e numrave në konceptin e zakonshëm nga më i vogli të më i madhi. Renditja leksikografike (lexicographic order). Ajo që na intereson në punimin tonë njihet edhe si renditje alfabetike e përcaktohet si më poshtë. Për fjalët u dhe v ne kemi $u < v$, në qoftë se u është prefiks i mirëfilltë i v ose ekziston faktorizimi $u = xau'$ dhe $v = xbv'$ ku a, b janë shkronja të tilla që $a < b$. Kjo është renditja edhe në një fjalor gjuhësor. Kjo është renditja edhe në një fjalor gjuhësor për shëmbull *matematikian < matematikor* (ref, *Falor I Gjuhës Së Sotme Shqipe f. 1070*)

Pohim 2.2[16]. Për fjalët $u, v \in A^*$ ku $|u| = n$, $|v| = m$, $d = p.m.p(m, n)$. Në qoftë se fuqitë u^p , dhe v^q të fjalëve u, v kanë të përbashkët një faktor me gjatësi të paktën $n + m - d$, atëherë u, v janë fuqi të së njëjtës fjalë.

Vërtetim. Marrim w faktorin e përbashkët me gjatësi $|w| = n + m - d$ të u^p dhe v^q . Kur $d = 1$, atëherë u, v janë fuqi të një shkronje. Marrim $m \leq n - 1$. Shohim $n - 1$, shkronjat e para për fjalën w . Shënojmë me $w(i)$ shkronjën e i -së së fjalës w

$$w(i) = w(i + m), \quad 1 \leq i \leq n - 1;$$

$$w(j) = w(j + m), \quad 1 \leq j \leq m - 1.$$

Ku $1 \leq i, j \leq n - 1$ dhe $j \equiv i + m \pmod{n}$. Nga ku del, $j = i + m$, ose $j = i + m - n$. Nga ku, për rastin e parë kemi $w(i) = w(j)$ ose për rastin e dytë $w(i) = w(j + n)$. Por nga ana tjetër $j = i + m - n \leq m - 1$; pra kemi

$$w(i) = w(i + m) = w(j + n) = w(j)$$

Por $(m, n) = 1$ dhe ku çdo element i bashkësisë $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ është i barabartë modul n me një shumfish të m . Si rezultat $n - 1$, shkronjat e para të w janë të barabarta. Për rastin e përgjithshëm marrim alfabetin $B = A^d$, kështu që u dhe v janë fuqi të një fjale të vetme me gjatësi d .

Shembull 2.1 Marrim fjalët e krijuara nga alfabeti $A = \{0, 1\}$. Përcaktojmë $f_1 = 1$, $f_2 = 0$ dhe $f_{n+1} = f_n f_{n-1}$ ku $n \geq 2$.

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
1	0	01	010	01001	01001010	0100101001001	01001010010010101010

Fjalët me gjatësi $\omega_n = |f_n|$, vargu i gjatësive s'është tjetër veçse vargu i Fibonaçit. Dy numra të njëpasnjëshme ω_n dhe ω_{n+1} për $n \geq 3$, janë relativisht të thjeshtë ndërmjet tyre. Marrim një faktor të majtë g_n të f_n me gjatësi $\omega_n - 2$ për $n \geq 3$. Kemi:

$$g_{n+1} = f_{n-1}^2 g_{n-2} \text{ për } n \geq 5.$$

Shohim $f_{n+1} \leq f_n^2$, $g_{n+1} \leq f_{n-1}^3$, dhe për $n \geq 5$, f_n^2 , f_{n-1}^3 kanë faktor të majtë me gjatësi $\omega_n + \omega_{n-1} - 2$.

$$g_8 = 0100101001001010010$$

$$g_7 = \overbrace{01001010010}^{f_6} \quad g_8 = \overbrace{0100101001001010010}^{f_7}$$

$f_5 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_6$

Figura 2.7 . Faktorë të ndryshëm për fjalët

2.2 Fjalët e pafundme

Nga alfabeti A marrim fjalën w nga A^+ (e formuar me shkronjat e alfabetit A). Le të jetë dhënë fjala u e ndryshme nga fjala me gjatësi zero, ku kjo fjalë paraqitet si faktor i fjalës w në dy raste. [17] Ekzistojnë fjalët x, y, x', y' nga A^* të tilla që $w = xuy = x'uy'$, ku $x \neq x'$. Me supozimin që $|x| < |x'|$, kemi këto raste për këtë faktor:

- $|x'| > |xu|$ nga kemi që $x' = xuz$, $z \in A^+$ për dhe $w = xuzuy'$ paraqitja e këtij faktori u krijon një copëtim.
- Fqinje, $|x'| = |xu|$ nga rrjedh që $x' = xu$ dhe rrjedhimisht $w = xuuy'$ përmban u në fuqi të dytë paraqitja e këtij faktori u janë fqinje.
- $|x'| < |xu|$ paraqitja e këtij faktori u krijon një mbivendosje.

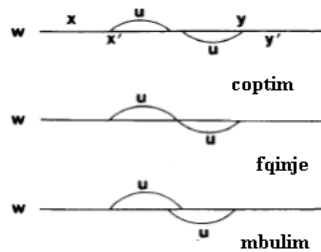


Figura 2.8 .Llojet e mbivendosjes

Pohim 2.3[17]. Fjala w ka dy mbivendosje të fjalës u , të ndryshme nga fjala me gjatësi një, atëherë dhe vetëm atëherë kur w ka faktor të formës $avava$ ku a është një shkronjë e alfabetit dhe v një fjalë e krijuar nga ky alfabet.

Le të përkufizojmë fjalët e pafundme në një alfabet të dhënë A .

Përkufizim 2.4 [14,16]. Fjalë e pafundme në alfabetin A , quhet funksioni:

$$\mathbf{a} : \mathbb{N} \rightarrow A$$

$$\mathbf{a} = a(0)a(1) \cdots a(n) \cdots$$

Ku $a_n = a(n)$ është një shkronjë e alfabetit, shpesh shënohet dhe:

$$\mathbf{a} = a_0 a_1 \cdots a_n \cdots$$

Një faktor i $\mathbf{a}$ me gjatësi $k \geq 0$ shënohet $\mathbf{a}^{[k]} = a_0 a_1 \cdots a_{k-1}$. Fjala $u \in A^*$ shënimin $u < \mathbf{a}$ për çdo $u = \mathbf{a}^{[k]}$ ku $k = |u|$. Është e lehtë e kuptueshme që

$$\mathbf{a} = ub$$

$$\mathbf{b}(m) = \mathbf{a}(m+k) \text{ për } m \geq 0.$$

Një fjalë e fundme u është faktor i një fjale të pafundme $\mathbf{a}$, nëse $\mathbf{a} = xuy$. Shënojmë me $F(\mathbf{a})$ faktorët e fundme u të fjalës $\mathbf{a}$, $F(\mathbf{a}) = \{u \in A^* | \mathbf{a} = xuy\}$ dhe grupin e faktorëve me gjatësi k shënohet me $F_k(\mathbf{a})$. Për nënbashkësinë X të $A^{\mathbb{N}}$, shënojmë me $F(X)$ bashkësinë e faktorëve të fjalëve në X . Le të kemi fjalën e pafundme $u = u_0 u_1 u_2 \cdots$ nga një alfabet i caktuar. Le të jetë $l \geq 0$ një numër jo negativ $u[0, l-1] = u_0 \cdots u_{l-1}$ është një parashtesë me gjatësi l e . Shënojmë me $u[i, i+l-1] = u_i \cdots u_{i+l-1}$ faktorët me gjatësi $l \geq 1$ të fjalës u në pozicionin e i .

Një fjalë e pafundme $v \in A^{\mathbb{N}}$ është një prapashtesë (suffix) e fjalës $\mathbf{a} \in A^{\mathbb{N}}$ në qoftë se ka një fjalë w në A^* të tillë që $\mathbf{a} = wv$. Kjo prapashtesë quhet jo e thjeshtë (proper), në qoftë se $w \neq \varepsilon$ ($\mathbf{a} \neq v$). $|w|_a$ tregon numrin e shkronjës a në fjalën w .

Renditja leksikografike për fjalët e pafundme në një alfabet të renditur shprehet $u < v$, atëherë dhe vetëm atëherë $u = xau'$ dhe $v = xbv'$ për fjalën $x \in A^*$ dhe a, b , janë shkronja nga alfabeti A ku $a < b$ dhe $u', v' \in A^{\mathbb{N}}$. Për bashkësinë $X \subset A^*$ shënojmë me X^{ω} bashkësinë e të gjitha fjalëve $\mathbf{a} = a_0 a_1 \cdots a_n \cdots$ ku $a_i \in X - \varepsilon$. Kur A^{ω} është e njëjtë

me $A^{\mathbb{N}}$, përdoren të dy shënimet pa i dalluar njëri nga tjetri. Përdorim gjithashtu dhe shënimin:

$$X^{\infty} = X^* \cup X^{\omega}$$

[17]Funksioni i zhvendosjes është funksioni $\sigma : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}$ i përcaktuar nga barazimi:

$$\sigma(a_0 a_1 \dots) = a_1 a_2 \dots$$

Për fjalën të fundme apo të pafundme, $\mathbf{a}$ në një alfabet A , funksioni kompleks (complexity function) i $\mathbf{a}$ është funksioni që tregon numrin, për çdo $n \geq 0$, të faktorëve me gjatësi n të fjalës $\mathbf{a}$.

$$P(\mathbf{a}, n) = \text{Card}(F_n(\mathbf{a}))$$

Nga ky përcaktim kemi $P(a, 0) = 1$ dhe $P(a, 1)$ është numri i shkronjave në fjalën a . Në qoftë se fjala a është e pafundme, atëherë çdo faktor mund të rritet në të djathtë, kështu $P(a, n) \leq P(a, n + 1)$ dhe për më tepër $P(a, n + m) \leq P(a, n)P(a, m)$ sepse kemi që:

$$F_{n+m}(a) \subset F_n(a)F_m(a).$$

Në bashkësinë $A^{\mathbb{N}}$ përcaktojmë distancën si më poshtë, për:

$$u, v \in A^{\omega}, d(u, v) = 2^{-n}, \text{ ku } n = \min\{k \geq 0 | u_k \neq v_k\}$$

dhe për $n = 0$, $d(u, v) = 0$, në qoftë se $u = v$. Bashkësia A^{ω} me distancën e përcaktuar si më sipër, përcakton një hapësirë topologjike në A^{ω} , shpesh e njohur dhe si hapësira e Cantorit. [16] Në këtë topologji, vargu i fjalëve të pafundme $a^{(k)}$ konvergjon në b ;

$$b = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{(k)}$$

Në qoftë se për çdo indeks $i \in \mathbb{N}$ kemi $a_i^{(k)} = b_i$. Për k mjaft të mëdha.

Për shembull: vargu $a^{(k)} = u^k v^{\omega}$ konvergjon te $b = u^{\omega}$.

Pohim2.5. [16] Për një alfabet të fundëm A , hapësira A^{ω} është kompakte.

Pohim.2.6[16] . Le të jëtë dhënë morfizmi $h : A^* \rightarrow A^*$ dhe shkronja a e tillë që $h(a) = aw$ ku w është një fjalë jo boshe. Ndërtojmë për $n \geq 0$. $u_n = h^n(a)$ dhe $v_n = h^n(w)$. Atëherë:

1. $u_{n+1} = u_n v_n$ dhe për më tepër u_n është prefiks i u_{n+1} , $\forall n \geq 0$.
2. $u_{n+1} = av_0 v_1 v_2 \cdots v_n$,
3. Fjala e pafundme:

$$x = aw h(w) h^2(w) \cdots h^n(w) \cdots$$

është limit i fjalës u_n dhe x është pikë fikse për h . Dhe është e vetmja pikë fikse e h që fillon me shkronjën a .

Shembull 2.2. Le të jetë $A = \{0, 1\}$ dhe $A^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}$

Marrim shkronjën $1 \in A = \{0, 1\}$ dhe fjalën me gjatësi 3 nga $001 \in A^*$

$$001 \in A^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}$$

$$h(1) = 1001, h^2(1) = 1001 h(001), h^3(1) = 1001 h(001) h^2(001), \dots$$

Shembull 2.3. Le të jetë $A = \{0, 1\}$ dhe

$$A^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 011, \dots, 1001, \dots\}$$

Shumëzimi i fjalëve $u = 1001, v = 010$ është fjala $w = uv = 1001010 = w_0 \cdots w_6$. Fjala v është dy herë në fjalën w në pozicionet 2 dhe 4. Gjithashtu shohim $w[1,3] = 001$, prapashtesa 1010 është katror i $(10)^2$. $|w|_0 = |u|_0 + |v|_0 = 2 + 2 = 4$

Shembull 2.4. [54] Fjala e Fbonaçit, është morfizmi i përcaktuar në alfabetin $\{a, b\}$ nga transformimi

$$h: a \mapsto ab, b \mapsto a$$

$$h^\omega(a) = (y_n)_{n \geq 0} = abaababaabaababaababaab \dots$$

Është një fjalë Sturmian dhe mund të përfitohet në këtë mënyrë për β (prerja e artë) rrënja më e madhe e polinomit $x^2 - x - 1 = 0$. Për $n \geq 1$ në qoftë se

$\lfloor (n+1)\beta \rfloor - \lfloor n\beta \rfloor = 2$ atëherë $y_{n-1} = a$ në rast të kundër $y_{n-1} = b$

$$h^\omega(a) := \lim_{n \rightarrow +\infty} h^n(a) = auh(u)h^2(a)h^3(a) \dots$$

Kjo fjalë e pafundme është dhe pika fikse për morfizmin h .

KAPITULLI III

VETITE TOPOLOGJIKE TË FRAKTALEVE NËPËRMJET ZBËRTHIMIT NË BAZË NUMËR PISOT

3.1 Zbërthimet - Beta ku beta është një numër Pisot ose Salem

Le të shohim një vështrim historik të zbërthimit në një bazë të çfardoshme b . Interes paraqitin disa zbërthime- β (ku beta nuk është numër i plotë). Këto zbërthime - β lidhen me numrat Pisot dhe Salem. Këtyre zbërthimeve u janë atribuar punime të atorëve të ndryshëm si Allouche, Frougny dhe Hare ...

1) Zbërthimi një vështrim i shkurtër

Njerëzimi i ka paraqitur numrat me një shumëllojshmëri bazash të ndryshme. Më e përdorur sot është ajo me bazë 10, sistemi i tanishëm i njohur me emrin sistemi Indu-Arabë. Mund të përmendim bazën 60 (e përdorur nga babilonasit), bazën 20 (e përdorur nga qytetërimi Maja), numrat me bazë 2 në shkencat kompjuterike e të tjera. Sistemi i numërimit me bazë 2 dhe 16 janë shumë të përhapura, në shkencat kompjuterike të ditëve të sotme. [19, 83]

Le të shohim paraqitjen standarde me bazë 10. [20] Marrim numrin $x \in [0,1)$

Shkruajmë :

$$x = 0.a_1a_2a_3 \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}.$$

Këtu $a_i \in \{0,1,\dots,9\}$ ku $0.a_1a_2a_3 \dots$ e ekuacionit të mësipërm është zbërthimi (paraqitja) me bazë 10 e numrit x .

Zbërthimi e $x \in [0,1)$ është periodik, në qoftë se $x = 0.a_1a_2 \dots a_k(a_{k+1}a_{k+2} \dots a_n)^w$

ku $a_k \neq a_n$ dhe perioda është numri më i vogël që plotëson relacionin, atëherë themi se paraqitja ka një paraperiodë me gjatësi k dhe periodën me gjatësi $(n - k)$. Në qoftë se

perioda ka gjatësi 1 dhe $a_n = 0$ atëherë ne themi se paraqitja është e fundme dhe kemi

$$x = 0.a_1a_2 \dots a_k.$$

Po japim disa raste me bazë 10 : $x = 0.123576498$ i fundëm ;

$$x = 0.1235(76498)^w \text{ periodik apo } x = \pi - 3 = 0.141592653589793238462643383279502884197169399375 \dots \text{ i pafundëm.}$$

Për numrat në sistemin me bazë 10 dimë që zbërthimi i një numri është periodik ose i fundëm, atëherë dhe vetëm atëherë kur ky është një numër racional. Është e vertetë edhe për paraqitjen e një numri në çdo bazë $b \in \mathbb{Z}$, kur $b \geq 2$, zbërthimi është periodik ose i fundëm, atëherë dhe vetëm atëherë kur ky është një numër racional. Për të shkruar një numër në një bazë të caktuar (radix(= bazë) termi i përdorur nga matematikanët) jo domosdoshmërisht baza duhet të jetë e plotë. Mund të zgjidhen baza të ndryshme jo të plota, si $\beta > 1$ numër algjebrik rrënja e $x^2 - 3x + 1 = 0$ apo çdo numër tjetër irracional si: π , e , $\sqrt{2}$, φ prerja e artë. Edhe pse π është irracional (me bazë 10) ne mund të ndjekim të njëjtin rregull duke shkruar fuqitë e bazës dhe paraqisim numrin bazuar në fuqitë e π .

$$\dots \pi^3, \pi^2, \pi^1, \pi^0$$

Një rreth me diametër 1_π ka perimetrin 10_π . Një rreth me rreze 1_π ka sipërfaqen 10_π .

Në bazë $\sqrt{2}$ kemi $11_{10} = 1011_2 = 1000101_{\sqrt{2}} = 1000.1001_\varphi$ si fuqi të φ në bazë φ

$$5 = \varphi^3 + \varphi^{-1} + \varphi^{-4} = 1000.1001_\varphi$$

Mbas viteve 50 të shekullit XX disa matematikanë ndër ta mund të përmendim Rényi, Alfréd (1957) dhe Parry (1960) i cili studioi në mënyrë të hollësishme zbërthimet kur baza është një numër b ku $b \notin \mathbb{Z}$. Këto raste njihen dhe si beta – numërimet, të cilat janë përgjithësime të shkrimit të numrave nga një bazë e plotë në një bazë jo të plotë. Me zhvillim më të mëdh në vitet 80 me përshkrimin e kuazikristaleve (quasicrystals) meqenëse beta – numërimet lejuan modelimin e kuazikristaleve. Sistemet e numërimit të përcaktuar nga numrat beta (beta-numërimi, numra Pisot apo Salem) janë të lidhura ngushtë me sistemet kanonike të numërimit, sisteme numërimi të gjeneruara nga funksionet iteraktive (përsëritës) apo sistemet të tipit Pisot.

Një veçori e përbashkët e studimit të zbërthimeve beta janë lidhjet të disa fushave nga teorina e numërit, gjeometria, topologjia, sistemet dinamike dhe shkencat kompjuterike. Në ditët e sotme ndërveprimet midis këtyre fushave kanë vendosur bërthamën e kërkimeve në beta-numërimin .

Reny ishte nga të parët që studioi për paraqitjen a një numri x në një bazë β jo numër i plotë. Këto njihen tani si zgjerimet β . Le të përkufizojmë zgjerimet β të një numri.

Përkufizimi 3.1[21] . Le të jetë $A = \{a_1 < a_2, \dots, a_n\}$, $n \geq 2$ një alfabet dhe numri real $\beta > 1$, paraqitja e $x \in [0,1]$ në bazën β është vargu $a := (a_n) \in A^\infty$ që vërteton barazimin;

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta^{-n}$$

ku $a_n \in \{0,1,\dots, [\beta] - 1\}$. Atëherë $a_1 a_2 a_3 \dots$ është zbërthimi β për x (paraqitja e x në bazën β). Në material β është gjithmonë një numër jo i plotë real dhe b një numër i plotë. Gjithashtu, si β dhe b janë rigorozisht më të mëdhenj se 1.

Do të heqim'0' në fillim të $a_1 a_2 \dots$, për të qenë të njëjtë me literaturën në zbërthimin β dhe, se dyti, sepse është më natyrale ta mendojmë zbërthimin β si një fjalë të pafundme dhe rezultatet kane një paraqitje më të qartë dhe më pak konfuze.

Shembulli i zbërthimit me bazë numër jo të plotë.

Shembulli 3.1.

Le të jetë β numër algjebrik, rrënja më e madhe e $x^3 - x - 1 = 0$

ku $\beta \approx 1.3247$. Atëherë:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3} \\ &= \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{\beta^5} \\ &= \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{\beta^7} + \frac{1}{\beta^8} + \dots \end{aligned}$$

kështu që zbërthimi β e 1-shit kemi $d_\beta(1) = 011 = 00111$, dhe $d_\beta(1) = 00110011 \dots$. Ndërsa për

$$\left(\frac{1}{5}\right)_\beta = (0^5 10^8 10^9)^\omega$$

Siç shihet nga shembulli, është e mundur të kesh disa zbërthime β për të njëjtin numër. Në fakt, në rastin e prerjes së artë, 1-shi ka një numër të pafundëm zbërthimesh $\beta = \varphi$. Numri i zbërthimeve për numër 1 është studiuar në [22], ku për $\beta \in (1, 2)$ vërtetohet që për të çdo numër;

$$1 \leq N \leq \omega,$$

ekzistojnë 2^ω numra realë për të cilët 1-shi ka pikërisht N zbërthime β të ndryshme.

Problema të lidhura me strukturën e përgjithshme të një zbërthimi β mund të gjenden në [23]. Veçoritë e këtyre zbërthimeve β lidhen me vetitë të veçanta të spektrit β të përkufizuar si :

$$Y(\beta) = \left\{ \sum_{i=0}^k \beta^{n_i} : k \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N}, n_i < n_{i+1} \right\} = \{0 = y_0 < y_2 < \dots\}$$

Le të kemi:

$$l(\beta) = \liminf (y_n - y_{n-1}) \text{ dhe } L(\beta) = \limsup (y_n - y_{n-1})$$

të lidhura me spektrin e β , që janë studiuar në disa punime si në [24, 25].

3.1.1 Zbërthimet Greedy dhe Lazy

Kur zbërthimi β për një numër nuk është i vetëm, atëherë ne mund t'i rendisim këto zbërthime β leksikografisht. Paraqesin interes zbërthimi β leksikografikisht më i madhi (greedy) dhe leksikografikisht më i vogli (lazy). Leksikografikisht më i madhi (greedy) ka autorë të shumtë në literaturë [7, 20, 22, 26, 28, 29,] njihet si zbërthimi greedy. (Emri vjen nga fakti se algoritmi që përdoret për të gjetur këtë zbërthim është një algoritëm greedy).

Përkufizimi 3.1.2[20]. Në qoftë se $d_\beta(x) = a_1a_2a_3 \dots$ është zbërthim β maksimal (lexikografikisht) atëherë e themi $a_1a_2a_3 \dots$ është zbërthim greedy për x me bazë β .

Një zbërthim greedy në bazën β e numrit real pozitiv x është e formës [26]

$$x = \sum_{i=-k}^{\infty} a_{-i} \beta^{-i},$$

Ku $a_{-i} \in \mathcal{A}_\beta = [0, \beta) \cap \mathbb{Z}$ dhe kënaq të ashtuquajturën kondita greedy

$$\left| x - \sum_{N_0 \leq k \leq N} a_k \beta^{-k} \right| < \beta^{-N}$$

për çdo $N \geq N_0$.

Për të marrë zbërthimin greedy për çdo numër $x \in \left[0, \frac{1}{\beta-1}\right]$ në mënyrë dinamike përdorim funksionin përsëritës (Iterating function) [27]

$$Tx = \begin{cases} \beta x & \text{në qoftë se } 0 \leq x \leq \frac{1}{\beta} \\ \beta x - 1 & \text{në qoftë se } \frac{1}{\beta} \leq x \leq \frac{1}{\beta-1} \end{cases}$$

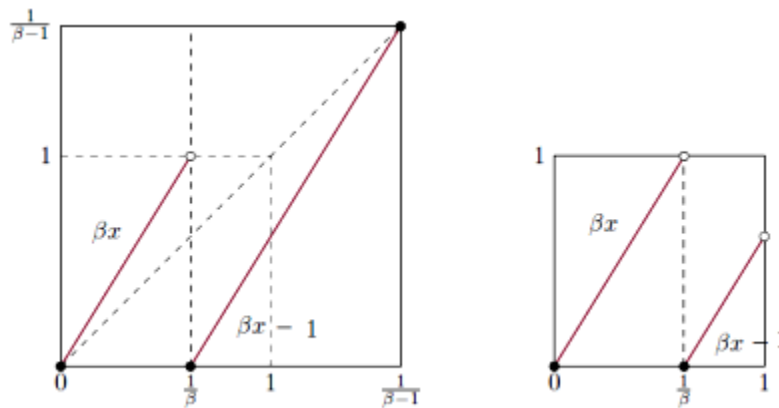


Figura 3.9 Funksioni përsëritës për zbërthimet greedy

Një zbërthim lazy në bazën β e numrit real pozitiv x përcaktohet si më poshtë :

nëse njohim n shkronjat e para $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ të zbërthimit lazy të x në bazën β , algoritmi lazy përcakton $b_{n+1} = 0$, atëherë dhe vetëm atëherë kur:

$$x \leq \sum_{i=1}^n a_i \beta^{-i} + \sum_{i \geq n+2} \frac{1}{\beta^i}$$

Shembulli 3.2

Le të jetë β rrënja e polinomit $p(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$, zbërthimi greedy i 1-shit kemi $d_\beta(1) = 111001$. Për të gjetur zbërthimin lazy kemi:

$$\sum_{i \geq 2} \frac{1}{\beta^i} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\beta-1} = \frac{1}{\beta} \beta = 1.$$

Shohim se $b_3 = 0$ pra për $n > 3$. Ne duhet të marrim $b_n = 1$. Kështu që $1 = 1101^w$.

Për të marrë zbërthimin lazy për çdo numër në $x \in \left[0, \frac{1}{\beta-1}\right]$ në mënyrë dinamike përdorim funksionin përsëritës (Iterating function)

$$Sx = \begin{cases} \beta x & \text{në qoftë se } 0 \leq x \leq \frac{1}{\beta(\beta-1)} \\ \beta x - 1 & \text{në qoftë se } \frac{1}{\beta(\beta-1)} \leq x \leq \frac{1}{\beta-1} \end{cases}$$

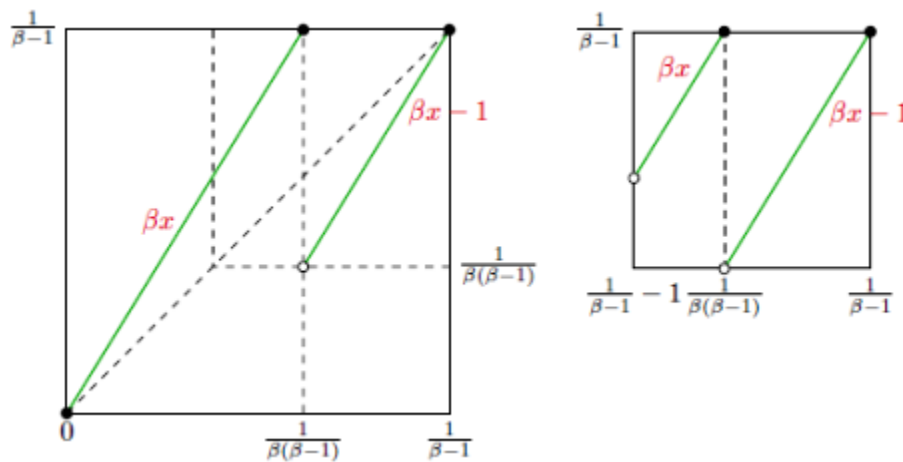


Figura 3. 10 Funksioni përsëritës për zbërthimet lazy

Pohim 3.1.3 .[27] Funksionet T dhe S janë të konjuguar, që do të thotë se ekziston funksioni i vazhdueshëm ϕ me të anasjelltë të vazhdueshëm i tillë që $\phi \circ T = S \circ \phi$.

Funksioni ϕ është $\phi(x) = \frac{1}{\beta-1} - x$.

Vërtetimi. [27]
$$\begin{aligned} S\phi(x) &= \frac{\beta}{\beta-1} - \beta x - i = \frac{1+\beta-1}{\beta-1} - \beta x - i = \\ &= \frac{1}{\beta-1} - \beta x + (1-i) = \phi T(x) , \end{aligned}$$

ky barazim është i vërtetë për çdo $i = 0, 1$. Shohim se $\phi(0) = \frac{1}{\beta-1}$, $\phi\left(\frac{1}{\beta-1}\right) = 0$ dhe

$$\phi\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta-1} - \frac{1}{\beta}$$

3.1.2 ALGORITMET Për ZBËRTHIMIN GREEDY.

Një nga elementet [25] kryesore që nevojitet për zbërthimin greedy, është llogaritja e $a_n = \lfloor \beta r_{n-1} \rfloor$. Kjo mund të bëhet me teknikën e floating-point (paraqitjen e numrave me mënyrën ku kemi 32 bits, ku shenja bit (1 bit), fuqia (8 bits), mantissa, pjesa mbas presjes (23 bits)), ashtu si në Maple nuk tregon numrin simbolikisht. Kjo teknikë na lejojnë për paraqitjen e “gabimit të tolerancës”. Për t’u mbrojtur nga “gabimi i tolerancës”, ne testojmë $|a_n - \beta \cdot r_{n-1}|$ në një tolerancë tol . Për qëllimet tona, ne i përdorim tol si $10^{-Digit/2}$ numrat ku “numrat” janë numrat e sigurisë që ne po përllogarisim. Në qoftë se kemi që $|a_n - \beta \cdot r_{n-1}| < tol$ në një tolerancë “ tol ” ne supozojmë që nuk po punojmë mjaftueshëm në një saktësi të lartë dhe i dyfishojmë “numrat”, rillogarisim B në këtë gradë më të lartë të sigurisë dhe ribëjmë llogaritjen.

Në të kundërt, llogaritja e r_n bëhet gjithmonë simbolikisht. Kjo bëhet për dy arsye. E para arsye është se kjo parandalon mbledhjen “gabimit të tolerancës” përmes llogaritjeve në vazhdim.

Arsyeja e dytë është që na lejon të kuptojmë të qënurit periodik ose i fundëm i zgjerimit β , ashtu siç krahasojmë r_n me të gjithë r_k me $k < n$. Në mënyrë të ngjashme përdoret kodi për zgjerimet lazy. Një shembull është i dhënë më poshtë.

SHEMBULL 3:[25]

Në kodin e mëposhtme ne marrim β si rrënjë të vetme e polinomit midis 1 dhe 2. Gjithashtu numrat Pisot janë numra të tipi β . Ata janë gjithmonë plotësisht të përcaktuar. Kur polinomi nuk ka rrënjë Pisot, atëherë nuk është e garantuar që rrënja

"000000011101111111111110111111110111111111101111111111111111..."

36 | Page

$\varepsilon_n = \varepsilon_n(x) (n = 0, 1, \dots)$, ndërsa $r_n(x) = f(\varepsilon_{n+1} + f(\varepsilon_{n+2} + f(\varepsilon_{n+3} + \dots) \dots)$. Në mënyrë rekurente $\varepsilon_0(x) = [x]$, $r_0(x) = \{x\}$, ndërsa $\varepsilon_{n+1}(x) = [\varphi(r_n(x))]$,

$$r_{n+1}(x) = \{\varphi(r_n(x))\}$$

$[x]$ është pjesa e plotë e numrit real x , ndërsa $\{x\}$ është pjesa dhjetore (fraksionale) e numrit real x . Funksioni $x = \varphi(y)$ është funksioni i anasjelltë i $y = f(x)$.

Në rastin e zgjerimit q-adic kemi $f(x) = x/q$ dhe në rastin e tipit fraksion (thyesor) i vazhdueshëm kemi $f(x) = 1/x$.

Ne mund t'i gjejmë shifrat duke marrë $\varphi(x) = q \cdot x$ (dhe $\varphi(x) = 1/x$) të anasjelltit e $f(x)$ dhe përcaktojmë $r_n(x) = \varphi(r_{n-1}(x)) \bmod 1$. Reny tregoi si në fraksionin (thyesor) të vazhdueshëm dhe zbërthimin q-adik, shifrat janë të pavarura. Pastaj ai studioi shtrirjen e zbërthimit q-adic, në zbërthimin greedy të dhënë nga:

$$f(x) = \frac{x}{\beta} \text{ me } \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \beta > 1 \text{ dhe } \varphi(x) = \beta \cdot x \bmod 1.$$

Në zbërthimin greedy shifrat nuk ishin të pavarura. Një shembull i thjeshtë për këtë është rasti $\beta = 1.618 \dots$ rrënja më e madhe $x^2 - x - 1$. Zbërthimi greedy nuk mund të përmbajë “011”. [20] Le të supozojmë se zbërthimi greedy për ndonjë x - përmban “011”. Nëse ne e zëvendësojmë atë me “100”, atëherë ne marrim njëzbërthim β të barabartë për të njëjtin numër, por ky i fundit është leksikografisht më i madhi, duke kundërshtuar faktin se zbërthimi β është zbërthimi greedy.

Algoritmi i zbërthimit greedy kryhet në mënyrë të drejtpërdrejtë. Në qoftë se zbërthimi greedy është periodik, atëherë arrijmë të dallojmë këtë fakt duke dhënë të plotë paraqitjen të këtij numri. Në qoftë se zbërthimi greedy nuk është periodik, atëherë është e mundur të gjejmë për çdo numër zbërthimin, relativisht shpejt. Mënyra për të gjetur zbërthimin β është përdorimi i algoritmit greedy ku në çdo hap merr më të madhin nga shifrat.

Përkufizim 3.2.4[27] Për numrin x kur njihen n shifrat greedy $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$. Atëherë algoritmi greedy përcakton $a_{n+1} = 1$, atëherë dhe vetëm atëherë:

$$\sum_{i=1}^n a_i \beta^{-i} + \frac{1}{\beta^{n+1}} \leq x$$

Algoritmi 1.1.[20] (algoritmi greedy)

Shënojmë $r_0 = x$ dhe $r_n = \beta \cdot r_{n-1} \pmod{1}$ dhe $a_n = \lfloor \beta r_{n-1} \rfloor$. Atëherë $a_1 a_2 a_3 \dots$ është zbërthimi greedy i x -it .

Çelsi i (algoritmi greedy) në studimin e Reny-it, është $r_n(x) = \varphi(r_{n-1}(x)) \pmod{1}$. Le të marrim operatorin $T_\beta(x)$ ku $T_\beta(x) = \beta \cdot x \pmod{1}$. Zbërthimi në bazën β mund të jetë i fundëm, periodik apo i pafundëm . Kur β është numër jo i plotë , ne përdorim operatorin T duke përsëritur dhe përfitojmë trajektoren e tij $x \xrightarrow{x_1} T(x) \xrightarrow{x_2} T^2(x) \xrightarrow{x_3} \dots$ ku $x_i = \lfloor \beta T^{i-1} x \rfloor$ ku marrim $x = \frac{x_1}{\beta} + \frac{x_2}{\beta^2} + \frac{x_3}{\beta^3} + \frac{x_4}{\beta^4} + \dots$ dhe quajmë $d_\beta(x) = .x_1 x_2 \dots$ zbërthimin beta të x . $Fin(\beta)$ bashkësia e të gjithë $x \geq 0$ të tilla që zbërthimi në bazën β është i fundëm. [28] Bashkësia $Fin(\beta) \cap [0,1[$ konsiston në pika të tilla që orbita T_β përfundon me zero. $Per(\beta)$, bashkësia e të gjithë $x \geq 0$ të tilla që zbërthimi në bazën β është periodik. [28] Bashkësia $Per(\beta) \cap [0,1[$ konsiston në pika të tilla që orbita T_β është periodike. Në sistemin standart të shkrimit të numrit në bazën $b > 1$, $b \in \mathbb{Z}$ është e vërtetë që: $Per(\beta) = \mathbb{Q}(\beta) \cap \mathbb{R}_+$ dhe $Fin(\beta) = \mathbb{Z}[\beta^{-1}] \cap \mathbb{R}_+$

Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që zbërthimi greedy të jetë periodik ose i fundëm, është që $T_\beta^{(n)}(x)$ të jetë periodik ose të përfundojnë me zero.

Perkufizimi 3.2.5 [20] Përkufizojmë me $Fin(\beta)$ bashkësinë e të gjithë x -ve të tilla që $T_\beta^{(n)}(x)$ të përfundojnë me zero.

Përkufizimi 3.2.6.[20] Përkufizojmë me $Per(\beta)$ bashkësia e gjithë $x - ve$, të tilla që $T_\beta^{(n)}(x)$ është periodik.

Në qoftë se $T_{\beta}^{(n)}(x)$ përfundon me zero, atëherë është periodik, me periodë me gjatësi 1 dhe periodë shifrën “0”. Kështu që $Fin(\beta) \subset Per(\beta)$. Në qoftë se β është një numër i plotë, atëherë $Fin(\beta)$ është bashkësia e numrave $\frac{n}{\beta^k}$ ku $n \in \mathbb{Z}$ dhe $Per(\beta)$ janë numrat racionalë.

3.3 Historik mbi numrat Pisot

R. Salem në 1963 vërtetoi që bashkësia e numrave Pisot është e mbyllur dhe numri më i vogël Pisot është rrënja e ekuacionit: $x^3 - x - 1 = 0$

M. Amara 1966 Përshkroi pikat limite të bashkësisë së numrave Pisot.

David W. Boy 1978-1985 paraqiti algoritmin për llogaritjen e pisotëve në një interval të fiksuar. Ka 3704 numra Pisot me një fiqi më të vogël baraz se 30 në intervalin (1, 2).

Në vitin 1989 David W. Boy vërtetoi: në qoftë se β është numër Salem i fuqisë së katërt, atëherë zbërthimi β i njëshit është periodik.

Një konjekturë nga Boy: për numrat Salem të fuqisë më të lartë ose baraz se 7, zbërthimi β i njëshit nuk është periodik. Prerja e argjendë i korrespondon një strukture tetëkëndëshe .

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \gamma = 1 + \sqrt{2}$$

Për numrat Salem të një fuqie të caktuar është studiuar shpërndara e pjesës jo të plotë të fuqive të n -ta. Për një numër Salem α , vargu (α^n) është i ngjeshur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, por me shpërndarje jo uniforme sipas modulit 1. Numri Salem është i ngjashëm me rrënjët e njëshit, kjo bashkësi (të gjitha numrat Salem) është e mbyllur nëse marrim fuqit e tyre . [79, 85] Rrënja më e vogël e polinom minimale $x^4 - 2x^3 + x - 1 = 0$ është

$\beta = \frac{(1+\sqrt{3+2\sqrt{5}})}{2}$ numri i vetëm Pisot i cili të katër rrënjët kanë vetinë

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta_3 + \beta_4$$

Shumë autorë të ndryshëm kanë bërë studime të thelluara në tiling të generuar nga numrat Pisot, si (Akiyama, Sidorov, Thuswaldner, Arnoux, Sh. Ito, Gjini etj.) Lidhshmëri e Pisot

dual tailings luan rol të rëndësishëm në zbërthimet në bazë β . Studimet e zbërthimeve β krijuan një link ndërmjet simbolikës dinamike dhe teorisë së numrit. Ekzistojnë numra Pisot, të cilët tili dual është jo i lidhur, edhe pse zbërthimi është i vazhdueshëm me shifra të plota.

Qëllimi kryesor i punimit është studimi i strukturës topologjike të tilings të generuar nga numrat Pisot unitari. Ku çdo tiling është e barabartë me mbylljen e brendësisë së vet tiling

Numri real $x \geq 0$ shkruhet në bazë 10 si më poshtë:

$$x = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0 + a_{-1} 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + \dots$$

ku $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ dhe $k \geq 0$

Për numrat $x \in [0, 1]$ zbërthimi në bazë 10 është [29] si vijon

$$x = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k}{10^k} \text{ ku } a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

Disa veti: 1. Thuajse të gjithë kanë paraqitje të vetme në këtë bazë.

2. Numrat me paraqitje jo të vetme kanë dy paraqitje të ndryshme:

$$\frac{9}{16} = \frac{5}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{5}{10^4} = \frac{5}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6} +$$

3. Bashkësia e numrave që kanë dy paraqitje :

$$\left\{ \frac{k}{10^n} \mid 1 \leq k \leq 10^n - 1, n \geq 1 \right\}$$

Numri 10 është baza e zbërthimit dhe $\{0, 1, \dots, 9\}$ bashkësia e shiftave të zbërthimit. Lë të jetë $\beta > 1$ numër real jo i plotë [28, 30, 84].

Zbërthimi me bazë β e numrave x është i formës :

$$x = a_k \beta^k + a_{k-1} \beta^{k-1} + \dots + a_1 \beta + a_0 + a_{-1} \beta^{-1} + a_{-2} \beta^{-2} + \dots$$

Shënohet: $x = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots$

Një zbërthim greedy në bazën β e numrit real pozitiv x është i formës:

$$x = \sum_{i=-k}^{\infty} a_{-i} \beta^{-i}$$

$a_{-1} a_{-2} \dots$ është pjesa fraksionale (jo e plotë) e x shënohet me $\{x\}$. Dhe $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ është pjesa e plotë e x shënohet me $[x]$. Shifrat a_k e përftuar nga algoritmi greedy janë elemente nga bashkësia $\mathcal{A}_\beta = \{0, \dots, \beta - 1\}$, në qoftë se β është numër i plotë dhe $\mathcal{A}_\beta = \{0, \dots, [\beta]\}$, në qoftë se β është numër jo i plotë. Ky zbërthim për $x \in [0, 1)$ merret si rezultatit i transformimit, beta që përsëritet:

$$T_\beta: x \rightarrow \beta x - [\beta x] \text{ dhe } [\beta x] \in \mathcal{A}_\beta$$

Le të kemi [29, 30, 31] $1 = d_{-1} \beta^{-1} + d_{-2} \beta^{-2} + \dots$ zbërthimin e 1 i përcaktuar nga algoritmi;

$$c_{-i} = \beta c_{-i+1} - [\beta c_{-i+1}], \quad d_{-i} = [\beta c_{-i+1}],$$

ku $c_0 = 1$, dhe $[x]$ është numri më i madh i plotë që nuk kalon x . Ky zbërthim mendohet si trajektorja (orbita) e transformimit:

$$T_\beta^n(1) \ (n = 1, 2, \dots). \ d_\beta(1) = d_{-1}, d_{-2}, \dots$$

quhet zbërthimi β i 1-it. Parry ka vërtetuar se vargu $x = a_1, a_2, \dots$ i numrave jo negativë është zbërthimi β i numrit real jo negativ, atëherë dhe vetëm atëherë kur kënaq konditën leksikografike [29] :

$$\forall p \geq 0, \ \sigma^p(d) <_{lex} d^*(1)$$

$$\text{Ku } d^*(1) = \begin{cases} d_\beta(1) & \text{if } d_\beta(1) \text{ është i pafundëm} \\ (d_{-1}, d_{-2} \dots \dots d_{-n+1}, (d_{-n} - 1))^\omega & \text{if } d_\beta(1) = d_{-1}, \dots d_{-n} \end{cases}$$

ku simbolet w^ω në këtë string i w , është zbërthimi periodik $w, w, \dots$ dhe σ është spostimi (shift) i përcaktuar nga relacioni: $\sigma((a_i)_{i \leq M}) = (a_{i-1})_{i \leq M}$ dhe vargu $x = a_1, a_2, a_3 \dots$ quhet i pranueshëm.

Zbërthimi në bazën β i një numri x si më sipër, është shtrirja e zbërthimit të numrit në bazë të çfardoshme të plotë. Siç kemi zbërthimin e një numri në bazë dy apo dhjetë, shtrihet natyrshëm ky koncept dhe në zbërthimin në bazën β .

3.4 Numrat Algjebrik, Numrat Pisot, numrat Salem dhe numrat Perron

Përkufizimi 3.4.7[32] . Një numër α quhet numër i plotë algjebrik, në qoftë se është rrënjë e polinomit monik me koeficient të plotë. Ka vetëm një polinom monik me koeficient të plotë $p(x)$, i quajtur polinomi minimal, ku α është rrënja e polinomit $p(x)$ me fuqi më të vogël.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{Z}, a_n = 1$$

Një rast është $\alpha = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, rrënja e polinomit, $p(x) = x^2 - 5x + 5$

Pohimi 3.4.8. Le të jetë α numër i plotë algjebrik i rendit n . Atëherë:

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \{a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \dots + a_1\alpha + a_0 \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}\}$$

Le të jetë $\alpha \in A$ i rendit n , polinomi minimal $f \in \mathbb{Q}[X]$ factors over $\mathbb{C}$

$$f[X] = \prod_{k=1}^n (X - \alpha^{(k)})$$

Marrim $\alpha = \alpha^{(1)}$. Dhe numrat $\alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$ janë të konjuguarit algjebrik të α . Secili prej këtyre numrave jep fushën e zgjeruar që janë izomorfike ndërmjet tyre nga izomorfizmi i

përcaktuar si $\alpha \rightarrow \alpha^{(k)}$ duke marrë funksioni $\varphi_j: \mathbb{Q}(\alpha) \rightarrow \mathbb{Q}(\alpha^{(k)})$, ku $\varphi_j(h(\alpha)) = h(\alpha^{(k)})$ ku $h \in \mathbb{Q}[X]$.

Ka disa klasa numrash algjebrikë që luajnë një rol të rëndësishëm në teorinë e numrit dhe aplikime, ku moduli i të konjuguarve të tij përcakton dhe klasën.

Përkufizimi 3.4.9 [33,34,36]. Në qoftë se α është numër i plotë algjebrik dhe $p(x)$ është polinomi minimal, atëherë themi për të gjitha rrënjët e tjera të $p(x)$ të konjuguar të α .

Përkufizimi 3.4.10. [33,34,36] Numrat Pisot β plotësojnë konditat e mëposhtme:

- β është numër i plotë algjebrik, $\beta > 1$
- Të gjithë β_i 't të konjuguarit $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_d$ të β (ku d është fuqia e polinomit minimal të β) janë në modul më të vegjël rigorozisht se 1, $|\beta_i| < 1$,

$$i = 2, 3, \dots, d$$

Përkufizimi 3.4.11 [33,34,36] Numrat Salem τ janë numra të plotë algjebrikë $\tau > 1$ të tillë që të gjithë të konjuguarit e τ 't janë në modul më të vegjël baraz se 1 dhe, të paktën, njëri prej të konjuguarve është i barabartë me 1 në modul.

- τ është numër i plotë algjebrik
- $\tau > 1$
- Të gjithë τ_i 't të konjuguarit $\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_d$ të τ (ku d është fuqia e polinomit minimal të τ) janë në modul më të vegjël ose baraz me 1, $|\tau_i| \leq 1, i = 2, 3, \dots, d$
- Ekziston të paktën një $j \in \{2, 3, \dots, d\}$ i tillë që $|\tau_j| = 1$

Përkufizimi 3.4.12. [35] Numrat Perron α janë numra të plotë algjebrikë $\alpha > 1$, të tillë që të gjithë $\alpha^{(k)}$ -të, të konjuguarit të ndryshëm nga α , janë në modul më të vegjël se α .

Në figurën e mëposhtme jepet një diagramë mbi këta numra algjebrikë.

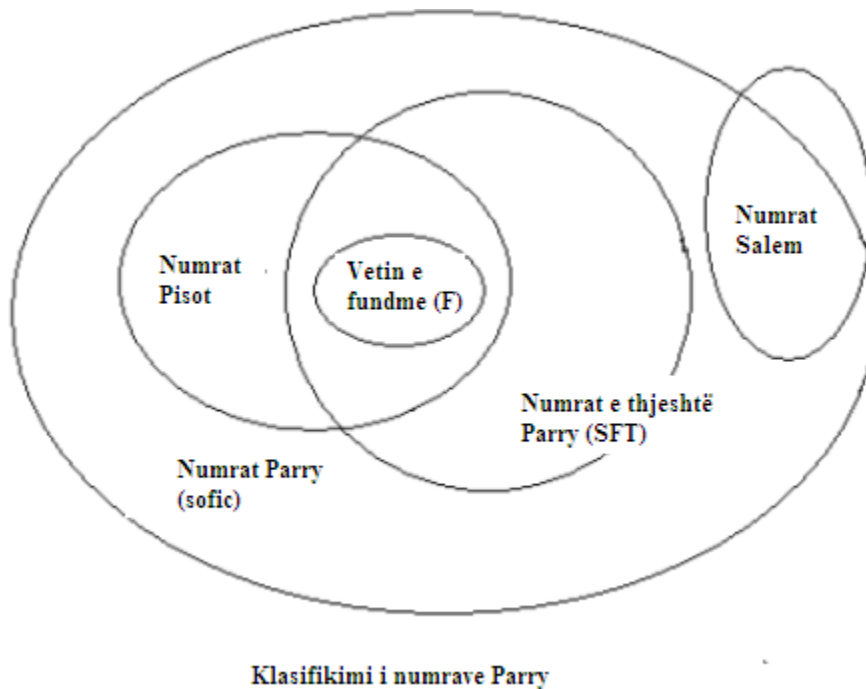


Figura 3.11. Klasifikimi i numrave Parri(Parry)

3.5 Algjebrikët e plotë të klasës S (bashkësia e numrave Pisot)

Përkufizim 3.5.13: [34,36] Le të jetë θ një numër i plotë algjebrik i tillë që të gjithë të konjuguarit e tij (jo vetë θ) të kenë modulin rigorozisht më të vogël se 1. Atëherë do të themi se θ i përket klasës S.

Për këtë klasë numrash kanë vend vetitë e mëposhtme.

Teorema 3.5.14.[36] Në qoftë se θ i përket klasës S, atëherë θ^n tenton në 0 (mod 1) kur $n \rightarrow \infty$.

Vërtetim: Supozojmë se θ është rrënjë e polinomi me fuqi k dhe të jenë $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ të konjuguarit e tij. Numri $\theta^n + \alpha_1^n + \dots + \alpha_{k-1}^n$ është një numër i plotë (racional). Meqë $|\alpha_j| < 1$ për të gjitha j shënojmë me ρ më të madhin e $|\alpha_j|, j = 1, 2, \dots, k-1$,

$$|\alpha_1|^n + \dots + |\alpha_{k-1}|^n < (k-1)\rho^n, \rho < 1,$$

dhe kështu prej nga $\theta^n + \alpha_1^n + \dots + \alpha_{k-1}^n \equiv 0 \pmod{1}$, shohim se $\pmod{1} \theta^n \rightarrow 0$, edhe kjo tendon në zero në të njëjtën mënyrë si termi i përgjithshëm i një progresioni gjeometrik që konvergjon. Shkruajmë se $\|\theta^n\| \rightarrow 0$.

Rezultati i mësipërm mund të përgjithësohet si vijon. Le të jetë λ një algjebrik i plotë i fushës $\mathbb{Q}(\theta)$, dhe të jenë $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}$ të konjuguarit e tij. Atëherë:

$$\lambda \theta^n + \mu_1 \alpha_1^n + \dots + \mu_{k-1} \alpha_{k-1}^n$$

është një numër i plotë (rational integer), kështu $\|\lambda \theta^n\|$ tenton të shkojë në zero kur $n \rightarrow \infty$. Mëtej përgjithësimet janë të mundura për numra të tjerë λ . Në klasën S është numrin kuadraktik $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. (Të gjithë të plotët pozitiv më të mëdhenj se 1 i përkasin S). Vërtetohen teoremat e mëposhtme.

Teorema 3.5.15[36]. Në çdo fushë të numrave realë algjebrikë, ekzistojnë numra të klasës S.

Vërtetim: Shënojmë me $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$, bazën e fushës së numrave të plotë dhe të jetë $\omega_1^{(i)}, \omega_2^{(i)}, \dots, \omega_k^{(i)}$ për $i = 1, 2, \dots, k-1$ të konjuguarit e numrave $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$. Nga teorema e Minkowskit për format lineare, mund të përcaktojmë numrat e plotët $x_1, x_2, \dots, x_k$, jo të gjitha zero, të tilla që:

$$|x_1 \omega_1 + \dots + x_k \omega_k| \leq A$$

$$\left| x_1 \omega_1^{(i)} + \dots + x_k \omega_k^{(i)} \right| \leq \rho < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$$

Nga ku, $A \rho^{k-1} \geq \sqrt{|D|}$, D është përcaktori i fushës. Për A mjaft të mëdha, kjo është gjithmonë e mundur dhe kështu te elementet e fushës;

$$\theta = x_1 \omega_1 + \dots + x_k \omega_k$$

i përkasin klasës S.

Teorema 3.5.16[36]. Numrat Pisot më të vegjël ose baraz me $\overline{\theta_{15}}$ renditen në vargun rritës si më poshtë :

$$\theta_2 = \theta'_1 < \theta'_2 < \theta'_3 < \theta_3 < \theta'_4 < \theta_4 < \theta'_5 < \theta'' < \theta'_6 < \dots$$

$$< \theta'_n < \theta_n < \theta'_{n+1} < \dots < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < \widehat{\theta_n} < \widehat{\theta'_{n+1}} < \widehat{\theta_{n-1}} < \dots < \widehat{\theta_{15}}$$

Numrat algjebrik θ_{2n} (θ_{2n+1}) janë rrënjë të polinomeve

$$P_{2n}(x) = \frac{1-x^{2n}(1+x-x^2)}{1-x} \quad \left(P_{2n}(x) = \frac{1-x^{2n+1}(1+x-x^2)}{1-x^2} \right) \text{ ku } n \geq 1$$

Numrat algjebrik $\widehat{\theta_{2n}}$ ($\widehat{\theta_{2n+1}}$) janë rrenjë të polinomeve

$$\widehat{P_{2n}(x)} = \frac{1+x^{2n}(1+x-x^2)}{1+x} \quad \left(\widehat{P_{2n+1}(x)} = 1 + x^{2n+1}(1+x-x^2) \right) n \geq 7$$

Numrat algjebrik θ'' , θ'_n , $\widehat{\theta_n}$ janë rrenjë të polinomeve : $1 + x + x^2 - x^4 - 2x^5 - x^6$, $1 - x^2 + x^n(1 + x - x^2)$, $1 - x^2 + x^n(1 + x - x^2)$, $n \geq 17$

3.6 Karakteristikat e numrave të klasës S

Vetia kryesore e numrave të klasës S na çon në pyetjet e mëposhtme. Supozojmë se $\theta > 1$ është një numër i tillë që $\|\theta^n\| \rightarrow 0$ kur $n \rightarrow \infty$ (ose gjendet një θ e tillë që ekziston një numër real λ i tillë që $\|\lambda\theta^n\| \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$). A mund të themi se θ është një numër i plotë algjebrik që i përket klasës S?

Ky problem i rëndësishëm ende është i pazgjidhur. Por për disa raste përgjigja mund të jetë positive. Është rasti kur plotësohet një nga dy kushtet e mëposhtme: [34,36]

1. Vargu $\|\lambda\theta^n\|$ tenton në zero mjaft shpejt, në mënyrë të tillë që të konvergjojë seria e $\sum \|\lambda\theta^n\|^2$.
2. Dimë se θ është numër algjebrik. Në fjalë të tjera, kemi dy teoremat pasuese.

Teorema 3.6.17 [36]. Në qoftë se $\theta > 1$ është i tillë që ekziston një λ i tillë që:

$$\sum \|\lambda \theta^n\|^2 < \infty,$$

Atëherë , θ është një numër i plotë algjebrik i klasës S dhe λ është një numër algjebrik i fushës së përcaktuar nga θ .

Teorema 3.6.18 [36] . Në qoftë se $\theta > 1$ është një numër i plotë algjebrik i tillë që ekziston një numër real λ me vetinë që $\|\lambda \theta^n\| \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, atëherë θ është një numër i plotë algjebrik i klasës S dhe λ është një numër algjebrik i fushës së përcaktuar nga θ .

Vërtetimi i teoremës bazohet në lemat që vijojnë .

Lema 3.6.19 Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm për seritë në fuqi:

$$f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$$

të jetë një funksion racional;

$$\frac{P(z)}{Q(z)}$$

(P dhe Q polinome), është që koeficientët të plotësojnë lidhjen rekurente,

$$\alpha_0 c_m + \alpha_1 c_{m+1} + \dots + \alpha_p c_{m+p} = 0,$$

për çdo $m \geq m_0$, ku numri i plotë p dhe koeficientët $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ janë të pavarura nga m.

Lema 3.6.20 (lema e Fatousit) [34] Në qoftë se në serinë fuqi në lemen 3.6.19 koeficientët c_n janë të plotë racionalë dhe, në qoftë se seria përfaqet një funksion racional, atëherë:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

Ku P/Q është e pathjeshtueshme, P dhe Q janë polinome me koeficientë racionalë dhe $Q(0) = 1$.

Lema 3.6.21(Kronecker).[37] Seria në lemen 3.6.18 përfaqëson një funksion racional; atëherë dhe vetëm atëherë kur përcaktori;

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_m \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_m & c_{m+1} & \dots & c_{2m} \end{vmatrix}$$

janë të gjithë zero për $m > m_1$.

Lema 3.6. 22 (Hadamard) Le të jetë përcaktori:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix}$$

me elemente komplekse ose reale. Atëherë:

$$|D^2| \leq \left(\sum_0^n |a_j|^2 \right) \left(\sum_0^n |b_j|^2 \right) \dots \left(\sum_0^n |l_j|^2 \right).$$

Lema 3.6.19, vërtetimin i cili është klasik dhe gjendet te Hardy, G. H., *A course of Pure Mathematics* 1952, lema 3. 6.20 , e cila mund të gjendet në Hardy, G. H, Littlewood, J. E, and Plya, G., *Inequality* 1952. Lema 3.6.22 ,vërtetimi në rastin kur elementet e D janë realë, është më i kuptueshëm. Kurse për rastin kompleks, është më i vështirë për t'u kuptuar:

Një problem i pazgjidhur ende ekzistensa e numrave transhendent ϑ që gëzon cilësinë që $\|\lambda \vartheta^n\| \rightarrow 0$ kur $n \rightarrow \infty$,

Mbyllja e bashkësis S .

Teorema 3.6.23 [34]. Bashkësia e numrave të klasës S është një bashkësi e mbyllur.

Për vërtetimin i kësaj teoreme na duhet të vërtetojmë së pari lemën e mëposhtme .

Lema 3.6.24 [34] Për çdo numër θ të klasës S i korrespondon një numër real λ e tillë që $1 \leq \lambda < \theta$ dhe e tillë që seria;

$$\sum_0^{\infty} \|\lambda \theta^n\|^2$$

konvergjon me një shumë më të vogël se një konstante e pavarur nga θ dhe λ .

Vërtetim: (Rafael Salem 1947) Le të jetë $P(z)$ një polinom i pathjeshtueshëm me koeficient racional të plotë që kanë θ si një prej rrënjëve të tyre (të gjithë rrënjët e tij gjenden në brendësi të rrethit njësi $|z| < 1$) dhe shkruajmë:

$$P(z) = z^k + q_1 z^{k-1} + \dots + q_k.$$

Le të jetë $Q(z)$ polinomi reciprok:

$$Q(z) = z^k P\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + q_1 z + \dots + q_k z^k.$$

Fillimisht supozojmë se P dhe Q nuk janë identike, e cila napërjashton θ të jetë rrënjë kuadratike. Seritë fuqi:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

ka koeficientë racionalë të plotë (meqë $Q(0) = 1$) dhe rrezja e konvergjencës është θ^{-1} .

Le të përcaktojmë μ të tillë që:

$$g(z) = \frac{\mu}{1 - \theta z} - \frac{P(z)}{Q(z)}$$

do të jetë i rregullt në rrethin njësi. Po të marrim;

$$P(z) = (z - \theta)P_1(z),$$

$$Q(z) = (1 - \theta z)Q_1(z),$$

Atëherë, P_1 dhe Q_1 janë polinome reciproke kemi:

$$\mu = \left(\frac{1}{\theta} - \theta\right) \frac{P_1\left(\frac{1}{\theta}\right)}{Q_1\left(\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Prej nga $\left|\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}\right| = 1$ për $|z| = 1$, prej nga $\frac{P_1}{Q_1}$ është i rregullt për $|z| \leq 1$, kemi

$$\left|\frac{P_1(\theta^{-1})}{Q_1(\theta^{-1})}\right| < 1$$

dhe kështu,

$$|\mu| < \theta - \frac{1}{\theta} < \theta.$$

Së fundmi,

$$g(z) = \sum_0^{\infty} \mu \theta^n z^n - \sum_0^{\infty} c_n z^n = \sum_0^{\infty} (\mu \theta^n - c_n) z^n$$

ka një rreze konvergjence më të madhe se 1, meqë rrënjët e $Q(z)$ të ndryshme nga θ^{-1} janë të gjithë jashtë rrethit njësi. Prandaj:

$$\sum_0^{\infty} (\mu \theta^n - c_n)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(e^{i\varphi})|^2 d\varphi.$$

Por, nga (1) dhe (2), kemi për $|z| = 1$

$$|g(z)| < \frac{|\mu|}{\theta - 1} + \left|\frac{P}{Q}\right| < \frac{\theta^2 - 1}{\theta(\theta - 1)} + 1 = 2 + \frac{1}{\theta} < 3$$

Prej

$$\sum_0^{\infty} (\mu \theta^n - c_n)^2 < 9$$

e cila, sigurisht, na jep

$$\sum_0^{\infty} \|\mu\theta^n\|^2 < 9.$$

Kur $|\mu| < \theta$ dhe 1 , mund të supozojmë, duke ndryshuar, nëse është e nevojshme, shenjën e P/Q , se $\mu > 0$. Rasti $\mu = 0$, i cili do të sjellë $P\left(\frac{1}{\theta}\right) = 0$, është përjashtuar për momentin, meqë kemi supozuar se θ nuk është njësi kuadratike.) Prandaj mund të shkruajm $0 < \mu < \theta$.

Për të përfunduar vërtetimin e lemës, supozojmë se $\mu < 1$. (Përndryshe mund të marrim $\lambda = \mu$ dhe nuk ka asgjë për të vërtetuar). Ekziston një i plotë s i tillë që

$$\frac{1}{\theta^s} \leq \mu < \frac{1}{\theta^{s-1}} \quad \text{ose} \quad 1 \leq \theta^s \mu < \theta,$$

Marrim $\lambda = \theta^s \mu$ dhe nga (3) kemi:

$$\sum_0^{\infty} \|\lambda\theta^n\|^2 = \sum_0^{\infty} \|\mu\theta^{n+s}\|^2 = \sum_0^{\infty} \|\mu\theta^m\|^2 < \sum_0^{\infty} \|\mu\theta^m\|^2 < 9.$$

Meqë $1 \leq \lambda < \theta$, mosbarazimi i fundit provon lemën, kur θ nuk është njësi kuadratike. Mbetet për t'u shqyrtuar rasti kur θ është njësi kuadratike. Në këtë rast

$$\theta^n + \theta^{-n}$$

Është një i plotë racional dhe:

$$\|\theta^n\| \leq \frac{1}{\theta^n}$$

Kështu

$$\sum_0^{\infty} \|\theta^n\|^2 < \sum_0^{\infty} \frac{1}{\theta^{2n}} = \frac{\theta^2}{\theta^2 - 1}$$

Dhe, meqë $\theta + \frac{1}{\theta}$ është barazimi i fundit te (3), kemi $\theta \geq 2$ dhe

$$\frac{\theta^2}{\theta^2 - 1} < \frac{4}{3}.$$

Kështu, meqë $\sum \|\theta^n\|^2 < \frac{4}{3}$ lema mbetet e vërtetë, me $\lambda = 1$.

Shënim. Në lemë, në vend të konsiderojmë konvergjencën e

$$\sum_0^\infty \|\lambda \theta^n\|^2$$

ne mund të marrim në konsideratë konvergjencën e:

$$\sum_0^\infty \sin^2 \pi \lambda \theta^n$$

Në këtë rast kemi:

$$\sum_0^\infty \sin^2 \pi \lambda \theta^n \leq 9\pi^2$$

Vërtetim i teoremës 3.6.18 [34] Shqyrtojmë një varg numrash të klasës S , $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p, \dots$ që tentojnë në numrin ω . Duhet të vërtetojmë që ω i përket S . Le të shoqërojmë çdo θ_p korresponduesen λ_p të lemës së tillë që:

$$1 \leq \lambda_p < \theta_p, \sum_0^\infty \sin^2 \pi \lambda_p \theta_p^n \leq 9\pi^2$$

Shqyrtojmë, nëse është e nevojshme, një nënvarg vetëm të θ_p , mund të hamendësojmë se λ_p të cilat përfshihen, për p mjaft të mëdha, midis 1 dhe 2ω tentojnë në limitin μ . Atëherë, relacioni I mësipërm na jep menjëherë:

$$\sum_0^\infty \sin^2 \pi \mu \omega^n \leq 9\pi^2$$

e cila provon se ω i përket klasës S . Kjo tregon që bashkësia e numrave S është e mbyllur. Kjo pasohet nga 1 që nuk është pikë limite në S . Në fakt është i menjëhershëm që implikohet $\theta \in S$, për të gjithë të plotët $q > 0$, ku $\theta^q \in S$. Prej këtij, nëse $1 + \epsilon_m \in S$, me $\epsilon_m \rightarrow 0$, do të kemi:

$$(1 + \epsilon_m)^{\left[\frac{\alpha}{\epsilon_m}\right]} \in S$$

atë jetë një numër real pozitiv dhe $\left[\frac{\alpha}{\epsilon_m}\right]$ shënojmë pjesën integrale të $\frac{\alpha}{\epsilon_m}$. Por, ashtu si $m \rightarrow \infty, \epsilon_m \rightarrow 0$ dhe

$$(1 + \epsilon_m)^{\left[\frac{\alpha}{\epsilon_m}\right]} \rightarrow e^\alpha.$$

Kjo do të pasohet nga fakti se numrat e S janë kudo të ngjeshur, gjë e cila bie ndesh me teoremën tonë.

Shembull 4

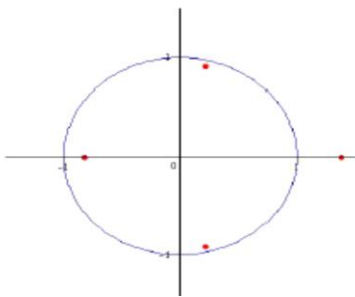


Figura 12. Numri Pisot 1.3803... dhe

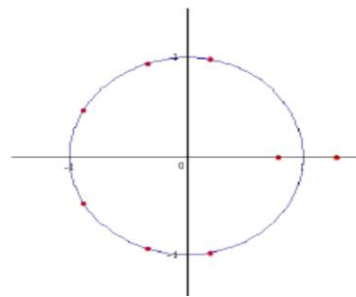


Figura 13 Numri Salem 1.2806..., dhe

rrënjët e tjera të $x^4 - x^3 - 1$ rrënjët e tjera të $x^8 - x^5 - x^4 - x^3 + 1$

roots	$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$
-------	----------------------------------

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

Results:

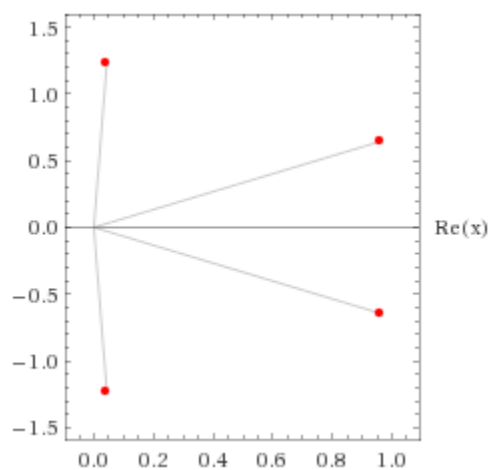
$$x \approx 0.0433154 + 1.22719i$$

$$x \approx 0.0433154 - 1.22719 i$$

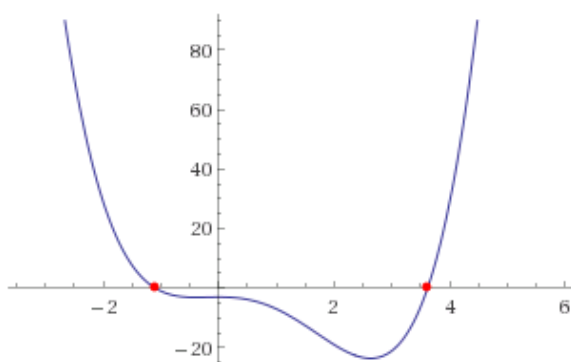
$$x \approx 0.956685 - 0.6412 i$$

$$x \approx 0.956685 + 0.6412 i$$

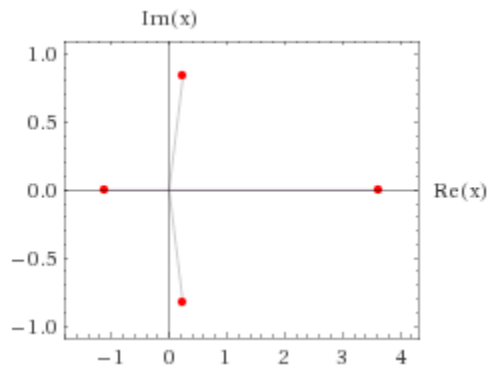
Roots in the complex plane:



$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3 = 0$$



$$x \approx -1.0968; x \approx 3.6165, x \approx 0.24020 - 0.83582 i, x \approx 0.24020 + 0.83582 i$$



Nurat Pisot 1.3803... rrënjë e $x^4 - x^3 - 1$ dhe Salem 1.2806....,

Marrim $\mathbb{Q}(\beta)$ si fusha minimale që përfshin numrat racionalë $\mathbb{Q}$ dhe numrin Pisot β . Vetitë e zbërthimit β janë të lidhur ngushtësisht me dinamikën simbolike.

Mbyllja e bashkësisë së vargjeve të pafundme, që përfitohen nga zbërthimi i β , quhet spostim β (β - shift). Sistemet në simbolikën dinamike janë nënbashkësi të mbyllura të pandryshueshme (closed shift-invariant) të $\mathcal{A}_\beta^N$. Spostimi sipas β është i fundëm, atëherë dhe vetëm atëherë kur $T_\beta^n(1) = 0$ për ndonjë n dhe është spostim pjesor (sofic), atëherë dhe vetëm atëherë kur orbita e transformimit $\{T_\beta^n(1)\}$ është e fundme. Një përshkrim të familjes së numrave Perri e ka bërë Shigeki Akiyama (2)

Lema 3.6.25. β_n është një numër Perron që nuk i përket U , U bashkësia e numrave të plotë algjebrik më të mëdhenj se 1 ku të konjuguarit kanë modul të shumtën 1.

Vërtetim. Le të jetë $V = \{1, 2, \dots, n\}$ dhe përcaktojmë brinjën direkte E nga përcaktimi:

$$i \rightarrow i + 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1), n \rightarrow 1, n \rightarrow 2$$

Matrica adjacente e këtij grafi është primitive dhe rrënja e tij Perron-Forbenius është β_n , që tregon që β_n është numër Perron. Nga $(\beta_n)^{n+1} - \beta_n - 1 = (\beta_n)^2 - 1 > 0$. Shohim se:

$$\beta_2 > \beta_3 > \beta_4 > \dots > 1$$

Meqë β_3 është numri më i vogël Pisot, β_n për $n \geq 4$ nuk janë numra Pisot. Por nuk janë as numra Salem, sepse nuk kanë të konjuguar pozitiv real.

Lema 3.6. 26 Polinom i $x^n - x - 1$ është i pazbërthyeshëm në $\mathbb{Q}$ për $n \geq 2$.

Shumë punime kanë treguar që numrat Pisot kanë një natyrë të bukur në zbërthimet beta. Për një numër të plotë algjebrik β , zbërthimi i njëshit $d_\beta(1)$ jo gjithmonë është i fundëm apo periodik. Megjithatë në rastin e një baze β që është një numër Pisot, zbërthimi greedy i njëshit është e sigurtë, është ose i fundëm, ose periodik. Kur β është numër Pisot, atëherë çdo element i zgjerimit $\mathbb{Q}(\beta)$ ka zbërthim greedy të fundëm ose periodik në bazën β edhe e anasjellta është e vërtetë.

Shohim unazat zgjerim $\mathbb{Z}[\beta]$, $\mathbb{Z}[\beta^{-1}]$ dhe $\mathbb{Z}[\beta, \beta^{-1}]$ [39]. Mardhënia ndërmjet këtyre anazave është:

$$\mathbb{Z}[\beta] \subset \mathbb{Z}[\beta, \beta^{-1}] \text{ dhe } \mathbb{Z}[\beta^{-1}] \subset \mathbb{Z}[\beta, \beta^{-1}].$$

Kur β është një numër i plotë algjebrik, atëherë $\mathbb{Z}[\beta, \beta^{-1}] \subset \mathbb{Z}[\beta^{-1}]$.

Kur β është një numër i plotë algjebrik njësi, atëherë $\mathbb{Z}[\beta, \beta^{-1}] \subset \mathbb{Z}[\beta]$ dhe si rrjedhojë

$$\mathbb{Z}[\beta] = \mathbb{Z}[\beta^{-1}]$$

Mbështetur në Teoremën Kronecker, 1957 kemi:

Teorema 3.6.27 [34] Për polinomin $f(w) \in \mathbb{Z}[w]$ i pazbërthyeshëm monik me rrënjë $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$. Në qoftë se $|\theta_i| \leq 1$ për çdo i , atëherë θ_i janë të gjithë faktorë ciklotomikë.

Përkufizim. 3.6.28 Polinomin $f(w)$ i pazbërthyeshëm monik me rrënjë θ_i . Masa Mahler përcaktohet e barabartë me:

$$M(f) = \prod_{k=1}^n \max\{1, |\theta_i|\}$$

Konjekturë. 3.6.29 [2014] Ekziston një $c > 1$ e tillë që për çdo $f(w) \in \mathbb{Z}[w]$,

$M(f) < c$ sjell $M(f) = 1$.

3.7 Struktura topologjike e tiling të përfituar nga Pisotë të ndryshëm.

Në punimin e tyre Sh.Akiyama dhe J.M Thuswaldner [15] paraqesin strukturën topologjike të tiling të lidhur me numrin irracional kuadratik α ku polinomi minimal i është $x^2 + Px + Q$ ku α formon sistem kanonik numërimi (CNS), atëherë dhe vetëm atëherë kur koeficientët e këtij polinomi plotësojnë kushtet $-1 \leq P \leq Q$ dhe $Q \geq 2$. Kjo lidhje me CNS realizohet në mënyrë të natyrshme. Gjithashtu, po në këtë punim, autorët përshkruajnë dhe tilin e lidhur me CNS. Për α një numër algjebrik i plotë i fuqisë n bazë e një CNS dhe zhytja kanonike Φ i $\mathbb{Q}(\alpha)$ në $\mathbb{R}^n$.

Marrimim $\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(r_1)}$ dhe $\alpha^{(r_1+1)}, \overline{\alpha^{(r_1+1)}}, \dots, \alpha^{(r_1+r_2)}, \overline{\alpha^{(r_1+r_2)}}$, të konjuguarit α ku $\alpha^{(i)}$ për $i \in \{1, \dots, r_1\}$ janë real dhe $\alpha^{(j)}$ për $j \in \{r_1+1, \dots, r_1+r_2\}$ janë kompleks. $x^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, r_1 + 2r_2$) të konjuguarit e $x \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

Ndërtojmë Φ funksionin e: $\Phi: \mathbb{Q}(\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ku $(r_1 + 2r_2 = n)$ të përcaktuar si

$$\Phi(x) = (x^{(2)}, \dots, x^{(r_1)}, \Re(x^{(r_1+1)}), \Im(x^{(r_1+1)}), \dots, \Re(x^{(r_1+r_2)}), \Im(x^{(r_1+r_2)}))$$

Ku për $n = 2$:

$$\Phi(x) = \begin{cases} (\Re(x), \Im(x)) & \text{për } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ (x, x') & \text{për } \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le të marrim bashkësinë;

$$T = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_{-i} \Phi(\alpha^{-i}) \mid a_{-i} \in \mathcal{N} \right\}$$

Kjo bashkësi përbën tilin qendror.

Është treguar në Katai-Kornei që familja e:

$$T + \Phi(\omega) \text{ ku } (\omega \in \mathbb{Z}[\alpha])$$

Formojnë një tiling (dekompozimi i $\mathbb{R}^n$ në bashkësi kompakte secila mbyllja e brendisë së vet dhe secila me kufi me masë Lebegu zero me prerje boshe të brendësive) për $\mathbb{R}^n$. Le të jetë α një numër algjebrik i plotë dhe $\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, |N(\alpha)| - 1\}$ ku $N(x)$ është norma e x në $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$. Kemi $\mathbb{Z}[\alpha]$ nënnumërimi më e vogël e $\mathbb{C}$, që përmban $\mathbb{Z}$ dhe α . Në qoftë se për çdo element x të $\mathbb{Z}[\alpha]$ ekziston numri i plotë jonegativ $\ell(x)$ i tillë që:

$$x = \sum_{i=0}^{\ell(x)} a_i \alpha^i (a_i \in \mathcal{N})$$

Ne e quajmë çiftin $(\alpha, \mathcal{N})$ sistem kanonik numërimi (CNS). Paraqitja na jep paraqitjen $\alpha - \text{adic}$ të x , ku α është baza e CNS $(\alpha, \mathcal{N})$.

Teorem. 3.7.30 Le të jetë $(\alpha, \mathcal{N})$ sistem kanonik numërimi (CNS) dhe T tilin qendror. Kanë vend pohimet e mëposhtme:

1. Trasformimi në $\mathbb{Z}[\alpha]$ i T përbën një mbulim të gjithë hapësirës;

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{\omega \in \mathbb{Z}[\alpha]} (T + \Phi(\omega))$$

2. Dy transformimi në $\mathbb{Z}[\alpha]$ të T priten në një bashkësi me masë Lebegu zero,

$$\mu((T + \Phi(\omega_1)) \cap (T + \Phi(\omega_2))) = 0$$

ku $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Z}[\alpha]$, $\omega_1 \neq \omega_2$.

3. Për çdo $p \in S$ imazhi i $\Phi(p)$ është pikë e brendshme e T , për më tepër origjina

$0 = \Phi(0)$ është pikë e brendshme e T .

4. T është e barabartë me mbylljen e brendësisë së kësaj bashkësie

$$T = \overline{\text{Inn}(T)}$$

5. Çdo pikë e brendshme e T është një pikë ekskluzive e brendësisë

$$\text{Inn}((T + \Phi(\omega_1)) \cap (T + \Phi(\omega_2))) = \emptyset$$

ku $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Z}[\alpha]$, $\omega_1 \neq \omega_2$

6. Masa e Lebegud për kufirin e T është zero

$$\mu(\partial(T)) = 0$$

Vërtetimi i kësaj teoreme kërkon të kuptohet natyra e tiling të generuar nga numrat quadratik.

3.8 Sistemi i numërimit Pisot dhe self-similar planar tiling

Marrim $\text{Fin}(\beta)$ bashkësinë e të gjitha zbërthimeve Beta të fundme. Kondita e mëposhtme luan një rol të rëndësishëm në studimet e zbërthimeve të fundme.

$$\text{Fin}(\beta) = \mathbb{Z}[1/\beta]_{\geq 0}. \quad (F)$$

Në qoftë se $\beta > 1$ është një numër i plotë, atëherë kondita (F) plotësohet. Anasjelltas, nëse plotësohet kondita (F) , kjo sjell që numri $\beta > 1$ është një numër Pisot.

$\mathbb{Z}[1/\beta]_{\geq 0}$ është nënbashkësia e elementeve jonegative të $\mathbb{Z}[1/\beta]$. $\text{Per}(\beta)$ bashkësinë e të gjitha pikave periodike të transformimit T_β bashkësia e pikave orbita e të cilave në transformimin T_β janë të fundme.

Schmid vërteoi që:

- në qoftë se $\mathbb{Q} \cap [0, 1) \subset \text{Per}(\beta)$, atëherë β është numër Pisot ose numër Salem,
- në qoftë se β është numër Pisot atëherë $\text{Per}(\beta) = \mathbb{Q} \cap [0, 1)$.

Marrim $\beta = \beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(r_1)}$ dhe $\beta^{(r_1+1)}, \overline{\beta^{(r_1+1)}}, \dots, \beta^{(r_1+r_2)}, \overline{\beta^{(r_1+r_2)}}$, të konjuguarit β ku $\beta^{(i)}$ për $i \in \{1, \dots, r_1\}$ janë real dhe $\beta^{(j)}$ për $j \in \{r_1+1, \dots, r_1+r_2\}$ janë kompleks .

$x^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, r_1 + 2r_2$) të konjuguarit e $x \in \mathbb{Q}(\beta)$.

Ndërtojmë Φ funksionin $\Phi: \mathbb{Q}(\beta) \rightarrow \mathbb{R}^{r_1+2r_2-1}$ ($r_1 + 2r_2 = n$) të përcaktuar si:

$$\Phi(x) = (x^{(2)}, \dots, x^{(r_1)}, \Re(x^{(r_1+1)}), \Im(x^{(r_1+1)}), \dots, \Re(x^{(r_1+r_2)}), \Im(x^{(r_1+r_2)}))$$

Marrim $A = a_{-1}, a_{-2}, \dots$ zbërthimi greedy në bazën β i një elementi të $\mathbb{Z}[\beta] \cap [0, 1)$. Bashkësia e elementeve të $\mathbb{Z}[1/\beta]_{\geq 0}$, të cilët në zbërthimin greedy kanë pjesën jo të plotë në A , e shënojmë me S_A . Një tail përcaktohet si $T_A = \overline{\Phi(S_A)}$, ku T_A është koleksioni i vargjeve të pafundme të majta të pranueshme:

$$\dots a_3 a_2 a_1 a_0 \oplus A = \dots a_3 a_2 a_1 a_0 . A$$

të fituar nga funksioni Φ në $\mathbb{R}^{n-1}$.

3.8.1 Klasifikimi i numrave Pisot të fuqisë së tretë .

Polinomi minimal i numrave Pisot unitary të fuqisë së 3 që gëzojnë vetinë e funde (F), janë klasifikuar si më poshtë:

1. $x^3 - ax^2 - (a+1)x - 1, a \geq 0$
2. $x^3 - ax^2 - bx - 1, a \geq b \geq 1$ (tipi Frougny- Solomyak)
3. $x^3 - ax^2 - 1, a \geq 1$ (tipi Hollander)
4. $x^3 - ax^2 + x - 1, a \geq 2$

Shigeki Akiyama [4] tregon se klasa e numrave Pisot të fuqisë së tretë, të cilët gëzojnë vetinë e funde (F), janë rrënja më e madhe e polinomeve me koeficientë të plotë:

$$x^3 - ax^2 - bx - 1, a \geq 0 \text{ dhe } -1 \leq b \leq a + 1$$

Në qoftë se $b = -1$, atëherë $a \geq 2$.

Pohim. **3.8.31** [4] Let β be a pisot unitar i fuqisë së tretë, i cili gëzon vetinë e funde (F) me polinom minimal $x^3 - ax^2 - bx - 1$, atëherë:

$$d_\beta(1) = .ab1, \text{ në qoftë se } 0 \leq b \leq a$$

$$d_\beta(1) = .(a-1)(a-1), \text{ në qoftë se } b = -1 \text{ dhe } a \geq 2$$

$$\text{dhe } d_\beta(1) = .(a+1)00a1, \text{ në qoftë se } b = a + 1$$

Nëse β është numë Pisot unitar që gëzojnë vetinë e funde (F), origjina në $\mathbb{R}^{d-1}$ është një pikë e brendshme e T_η tili qendror dhe tailin $T_\omega(\omega) \neq \eta$. Të tjerat nuk e përmbajnë origjinën.

3. 8. 2 Lidhshmëria në Pisotët e fuqisë së tretë e të katër.

Lidhshmëri e Pisot dual tailings luan rol të rëndësishëm në zbërthimet në bazë β [30,31]. Ekzistojnë numra Pisot, të cilët dual tiles është jo i lidhur edhe pse të surprizur, për arsye se zbërthimi është i vazhdueshëm me shifra të plotë. Numri i zbërthimeve β nga numra Pisot ku kemi komponente të palidhur, është më i paktë si raste të studiuara. Një rast është dhe ky i studuar në punimin e doktoraturës[82,86]. Zbërthimet Pisot për rastin e rrënjës së polinomit:

$$x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

për të cilin ka të paktën një komponente të palidhur.

Teorema 3.8. 32.[30,31] Është dhënë $\beta > 1$ Pisot unitar. Shënojmë me $\eta = \max_{k \geq 1} T_\beta^k(1)$ dhe në këtë mënyrë marrim më të voglin tile T_η . Në qoftë se:

$$T_\eta \cap (T_\eta - \Phi(\beta^{-1})) \neq \phi,$$

atëherë çdo Pisot dual tile është i lidhur sipas harqeve .

Le të jetë β një rrënjë pozitive më e madhe se 1 e;

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0,$$

ky është një numër Pisot unitar. Marrim bashkësinë:

$$T_\beta = \{\sum_{i \geq 0} w_i (\beta')^i; \forall i, w_i \in \{0,1\}, w_i w_{i+1} w_{i+2} = 0\},$$

e cila është një bashkësi kompakte nënbashkësi e $\mathbb{C}$, të cilën e quajmë taili qëndror ose dhe Rauzy fraktal. [66]Si tregohet dhe në figurë, ajo ndahet në tre taile bazë $T_\beta(i)$, $i = 1, 2, 3$.



Figura 3. 14 Razy Fraktal

Ato i korespondojnë vargjeve $(w_i)_{i \geq 0}$ të tilla që, ose $w_0 = 0$, ose $w_0 w_1 = 10$, ose $w_0 w_1 = 11$. Taili qendror mund të mbulojë planin në dy mënyra, e para korespondon me tiling periodik, e dyta me tiling me mbulim vetjak të përsëritur(self-replicating tiling)

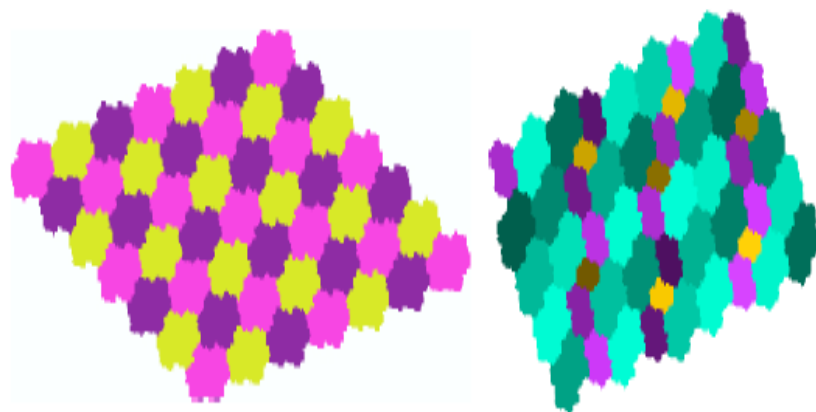


Figura 3.15. Dy mënyra mbulimi i planit nga fraktalet Razy

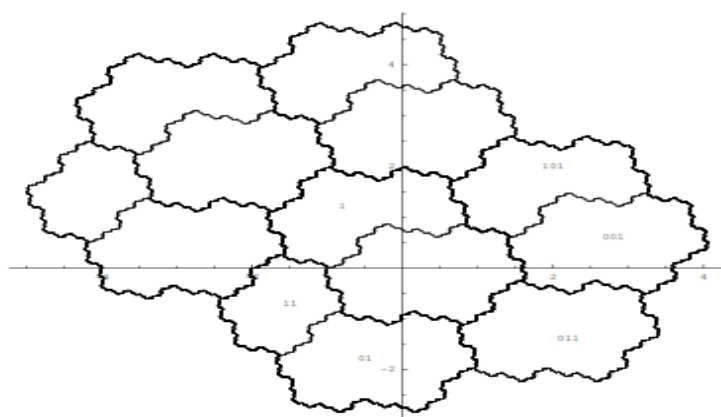


Figura 3. 16. Struktura e tribonaçi Fraktale

Teorem 3.8.33.[30.31] Marrim β një numër Pisot unitar i fuqisë së 3 ose të 4 rrënjë e polinomit monik $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Në qoftë se $\deg \beta = 3$ ose $p(0) = 1$, atëherë çdo tile është i lidhur. Në qoftë se $\deg \beta = 4$ dhe $p(0) = -1$, atëherë çdo tile është i lidhur atëherë dhe vetëm atëherë kur plotësohet kushti $a + c - 2|\beta| \neq 1$ ku a, c, β janë koeficientë dhe rrënja e polinomit;

$$p(x) = x^4 - ax^3 - bx^2 - cx - 1.$$

Në fakt, në qoftë se $\deg \beta = 4, p(0) = -1$ dhe $a + c - 2|\beta| = 1$, ekzistojnë tilin jo të lidhur.

Lema. 3.8.34 [30.31] Në qoftë se β , një numër Pisot unitar i fuqisë së 4 dhe polinomi minimal është :

$$p(x) = x^4 - ax^3 - bx^2 - cx - 1$$

Dhe, në qoftë se për rrënjën negative γ të polinomit $x^2 - |\beta|x - 1$ është e vërtetë që $p(\gamma) > 0$, atëherë ka të paktën një tile jo të lidhur.

Teorem 3.8.35 .[30.31, 82 , 86] Në qoftë se β një numër Pisot unitar i fuqisë së 4 dhe polinomi minimal është ;

$$p(x) = x^4 - ax^3 - bx^2 - cx - 1;$$

çdo tile është i lidhur sipas harqeve përveç rasteve:

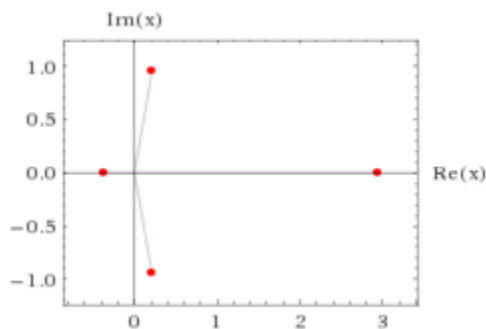
$$\left\{ \begin{array}{l} a \geq 5 \\ c = a - 3 \\ \frac{5-3a}{2} \leq b \leq -a \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} a \geq 3 \\ c = a - 1 \\ \frac{1-a}{2} \leq b \leq -1 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} a \geq 3 \\ c = a + 1 \\ \frac{1+a}{2} \leq b \leq a - 1 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} a \geq 1 \\ c = a + 3 \\ \frac{5+3a}{2} \leq b \leq 2a + 2 \end{array} \right\}$$

Shembull 4 .

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 1$$

Rrënjët e këtij polinomi paraqiten në figurën e mëposhtme. Rrënjët të ndërtuara me anë të programit www.wolframalpha.com . Vihet re edhe nga figura që rrënja më e madhe është një numër Pisot, i fuqisë së katërt.

Roots in the complex plane:



roots $x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x \approx -0.358434$$

$$x \approx 2.93132$$

$$x \approx 0.213559 - 0.951921 i$$

$$x \approx 0.213559 + 0.951921 i$$

Figura 3.17. Rrënjët e polinom i fuqisë 4

Jemi në kushtet e lemës; [82, 86]

$$\gamma = 1 - \sqrt{2}.$$

Është rrënja negative e;

$$x^2 - |\beta|x - 1 = 0$$

$$p(\gamma) = \gamma^4 - 3\gamma x^3 + \gamma^2 - 2\gamma - 1$$

$$p(\gamma) = (1 - \sqrt{2})^4 - 3(1 - \sqrt{2})^3 + (1 - \sqrt{2})^2 - 2(1 - \sqrt{2}) - 1$$

$$= 3\sqrt{2} - 4 > 0$$

Zbërthimi β i 1 i përfituar nga algoritmi greedy për këtë rast:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{3}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^4} \\ &= \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{3}{\beta^4} + \frac{1}{\beta^5} \\ &= \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{2}{\beta^4} + \frac{4}{\beta^5} - \frac{1}{\beta^6} + \frac{2}{\beta^7} + \frac{1}{\beta^8} \\ &= \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{2}{\beta^4} + \frac{4}{\beta^5} + \frac{2}{\beta^6} + \frac{1}{\beta^7} + \frac{3}{\beta^8} + \frac{1}{\beta^8} \\ d_\beta(1) &= 2, 2, 1, 3, 1 = 2, 2, 1, 2, 4, 2, 1, 3, 1 \dots \end{aligned}$$

Zbërthimi β i 1; shohim $d_{-3} < \lfloor \beta \rfloor$



Figura 18. Fraktal i palidhur i fuqisë 4 [kodi Ne Shtojcë]

Interes paraqet studimi i kufirit të kësaj kategorie për të arritur, nëse është e mundur, nga se është e lidhur fakti i palidhshmërisë.

Lemë 3.8.36 .[30.31] Le të jetë $d_\beta(1) = \lfloor \beta \rfloor, d_{-2}, \dots$ zbërthimi β i 1. Në qoftë se $d_{-2} < \lfloor \beta \rfloor$ atëherë çdo tilël është i palidhur.

Lemë 3.8.37 .[30.31] Le të jetë $d_\beta(1) = \lfloor \beta \rfloor, \lfloor \beta \rfloor, d_{-3}, \dots$ zbërthimi β i 1. Në qoftë se $d_{-3} < \lfloor \beta \rfloor$ atëherë çdo tilël është i palidhur.

Lemë 3.8.38 .[30.31] Le të jetë $d_\beta(1) = \lfloor \beta \rfloor, \lfloor \beta \rfloor, \lfloor \beta \rfloor, d_{-4}, \dots$ zbërthimi β i 1. Atëherë çdo tilël është i palidhur.

Në punimin e tyre (Shigeki Akiyama, Gjini. Nertila ,2005) japin zbërthimin β të 1 për $x^4 - ax^3 - bx^2 - cx + 1 = 0$

Kapitulli I V

Përdorimet e Sistemeve Fraktale në Mjekësi

Sistemet biologjike janë kryesisht të parregullta, komplekse dhe jolineare. Parregullsitë e sistemit biologjik nuk mund të përcaktohen me anë të gjeometrisë klasike Euklidiane. Retë nuk janë sfera, malet nuk janë kone dhe rrufeja nuk udhëton në linja të drejta. Kjo është e vërtetë edhe për sistemet biologjike. A mund ta përcaktojmë vaskularizimin e tumorit apo sipërfaqen e formës komplekse të parregullt të gjëndrës? A mund ta përshkruajmë zonën sipërfaqësore alveolare të pulmoneve apo zonën e perfuzionit glomerular të veshkës me anë të gjeometrisë euklidiane? Për të tejkaluar këto kufizime të gjeometrisë Euklidiane, Mandelbrot-i formalizoi, për herë të parë, konceptin e dimensionit fraktal [2]. Ai prezantoi termin "gjeometri fraktale" dhe u përpoq të shpjegonte sjelljen e parregullsisë në natyrë. Gjeometria fraktale është një nga mjetet e rëndësishme për të shpjeguar gjeometrinë e vërtetë të natyrës. Një nga pikëpamjet tradicionale të sëmundjes është ajo që Tim Buchman e quan domosdoshmëria e "përcaktimit të numrit". Ai argumenton se, nëse niveli i bikarbonatit të pacienti është i ulët, atëherë jepini bikarbonat; nëse prodhimi i urinës është i ulët, atëherë administroni një diuretik; nëse pacienti me gjakderdhje ka një presion gjaku në rënie, atëherë duhet të normalizoni presionin e gjakut. Ai vazhdon më tej, se ndërhyrje të tilla zakonisht janë joefikase dhe madje edhe të dëmshme. Trupi ynë njerëzor është shembulli më i mirë i gjeometrisë fraktale. Sistemet tona të mushkërive, të trurit dhe të enëve të gjakut janë të gjitha fraktale. Pema bronkiale dhe degëzimi i saj është fraktal. Ajo ka një dimension fraktal të veçantë. Në mënyrë të ngjashme organizimi anatomik i organit më misterioz të trupit tonë, trurit, është gjithashtu fraktal.

Sistemet fraktale përbëjnë një gjuhë e re e të fuqishme matematikore, në sajë të së cilës ju mund të përshkruani fenomenet natyrore dhe të zgjidhni problemet e realitetit, që janë diskutuar për një kohë të gjatë dhe nuk kanë marrë ende përgjigje.

Sistemi Fraktal është një matematikë moderne, që përdor kompjutera në përpjekjen për të dhënë përgjigjen. Sistemet biologjike janë kryesisht të parregullta, komplekse dhe jolineare. Parregullsitë e sistemit biologjik nuk mund të përcaktohen me anë të gjeometrisë klasike euklidiane. Retë nuk janë sfera, malet nuk janë kone dhe rrufeja nuk udhëton në linja të drejta. Kjo është e vërtetë edhe për sistemet biologjike. A mund ta përcaktojmë vaskulaturën e tumorit ose sipërfaqen e formës komplekse të parregullt të gjëndrës? A mund ta përshkruajmë zonën sipërfaqësore alveolare të zonës së perfuzionit të mushkërisë ose glomerularin e veshkës me anë të gjeometrisë Euklidiane? Për të kapërcyer këto kufizime të gjeometrisë Euklidiane, Mandelbrot-i formalizoi, për herë të

parë, konceptin e dimensionit fractal. Një nga pikëpamjet tradicionale të sëmundjes është ajo që Tim Buchman e quan domosdoshmëria e "përcaktimit të numrit". Ai argumenton se, nëse niveli i bikarbonatit të një pacient është i ulët, atëherë jepini bikarbonat; nëse prodhimi i urinës është i ulët, atëherë administroni një diuretik; nëse pacienti me gjakderdhje ka një presion gjaku në rënie, atëherë normalizoni presionin e gjakut. Ai vazhdon më tej, se ndërhyrje të tilla zakonisht janë joefiksase dhe madje edhe të dëmshme. Trupi ynë njerëzor është shembulli më i mirë i gjeometrisë fraktale..Sistemet tona të mushkërive, të trurit dhe të enëve të gjakut janë të gjitha fraktale. Pema bronkiale dhe degëzimi i saj është fraktal[48]. Ajo ka një dimension fraktal të veçantë. Në mënyrë të ngjashme organizimi anatomik i organit më misterioz të trupit tonë, trurit, është gjithashtu fraktal. Një fraktal është një sistem për të shkallëzuar invariancionin e pezulluar midis rrëmujës dhe rendit. Në sistemet natyrore, e gjithë struktura e sistemit shpesh pasqyrohet në çdo pjesë [49, 80, 81].

Shpjegimi mund të jetë që forcat që formojnë të gjithë sistemin duken si ato që formojnë një pjesë individuale. Në fakt, një sistem është i vetngjashëm, nëse forcat e ngjashme veprojnë në nivele të ndryshme të shkallës. Gjeometria fraktale siguron një mënyrë të re për të vëzhguar natyrën dhe për të studiuar format e saj të parregullta. Në tri dekadat e fundit, gjeometria fraktale ka gjetur aplikime në shkencat biomjekësore, duke përfshirë edhe disa degë të neuroshkencës, kryesisht ato të analizën të modeleve elektroencefalografike dhe për të përshkruar format e qelizave të neuroneve.

4.1 Strukturat biologjike dhe fraktalet

Strukturat biologjike të izoluara fraktale janë të lidhura me një strukturë më të lartë të rendit fraktal. Trupi ynë është shembulli më i mirë i gjeometrisë fraktale[47]. Sistemet tona të mushkërive, të trurit dhe të enëve të gjakut janë të gjitha fraktale. Pema bronkiale dhe degëzimi i saj është fraktal. Ajo ka dimension fraktal të veçantë. Në mënyrë të ngjashme, organizimi anatomik i organit më misterioz të trupit tonë, trurit, është gjithashtu fraktal. Qeliza Purkinje formon dendritë mbushëse të hapësirës që gjerësisht degjenerojnë degëzime jombivendosëse në një plan të vetëm. Denduritet e një qelize Purkinje që nuk mbivendosen mbi njëra-tjetrën, mundësojnë që ajo të shkaktojë qindra apo mijëra degët dytësore që ndahen në zgjatime gradualisht të vogla dhe të shkallëzuara, në përputhje me njëra-tjetrën. Sinapset e tepërta me fibra paralele kalojnë pingul përmes planit të formuar nga dendritet e qelizave Purkinje [51, 80, 81].

Përpjekje të konsiderueshme janë bërë për të përcaktuar karakteristikat anatomike të dendriteve të qelizës Purkinje dhe mekanizmave molekulare të brendshme[45]. Dendritet

e qelizave Purkinje janë degëzime që kalojnë nga fibrat nervore dhe përcjellin sinjalet. Këto dendrite janë struktura tipike fraktale.

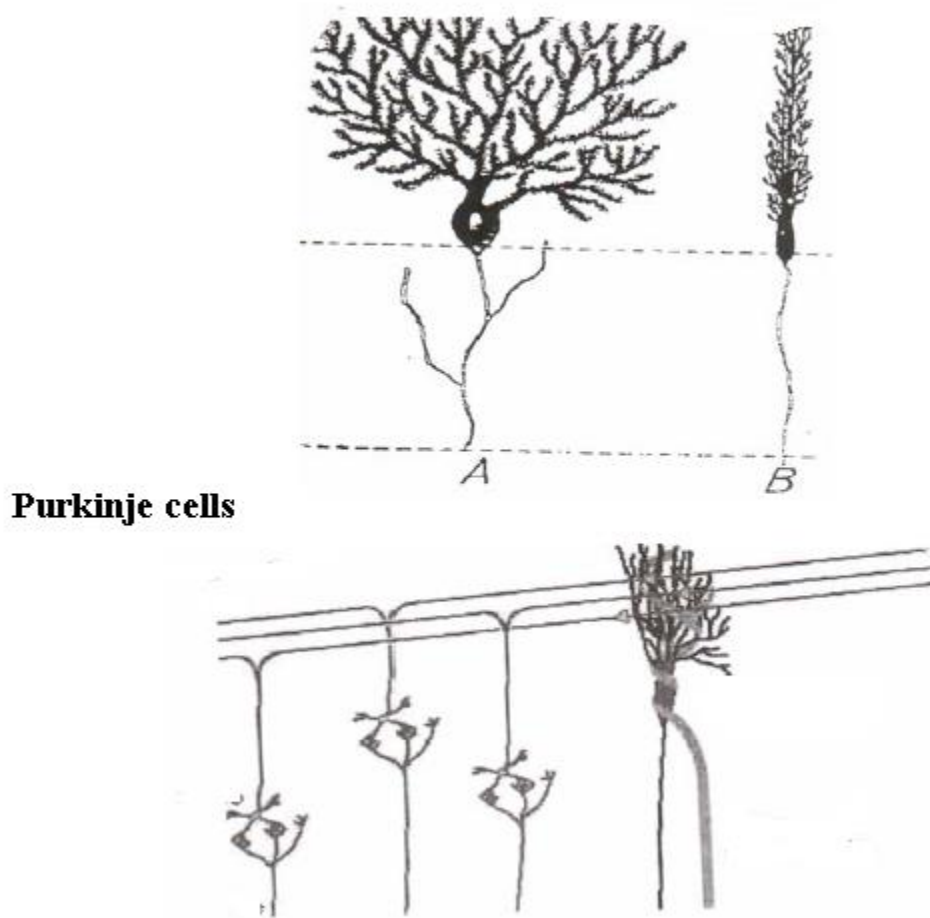


Figura 4.19. Qeliza Purkinje

Janë bërë përpjekje për të rindërtuar proceset e rritjes së dendritit duke përdorur modele matematikore. Midis këtyre janë modelet e rritjes që synojnë gjetjen e rregullave elementare të zhvillimit të dendriteve që informojnë variacionin e modelit të degëve. Modelet e rritjes stokastike supozojnë se rritja e dendriteve është rezultat i procesit stokastik në seri.

Kanceri është një tjetër sëmundje ku analizimi fraktal jo vetëm që mund të ndihmojë në diagnostikimin, por, gjithashtu, edhe në trajtimin e tij[46]. Dihet se tumoret kanceroze - rritja jonormale dhe e shpejtë e qelizave - shpesh kanë një rritje karakteristike të enëve të gjakut të reja që formojnë një rrëmujë në vend të rrjetës së rregullt të enëve të shëndosha

të gjakut. Këto enë që nuk funksionojnë mirë jo vetëm që dëmtojnë indin, por, gjithashtu, mund ta bëjnë më të vështirë trajtimin e sëmundjes, duke ndaluar veprimin e barnave në pjesët e brendshme të tumoreve, aty ku ato janë më të nevojshme.

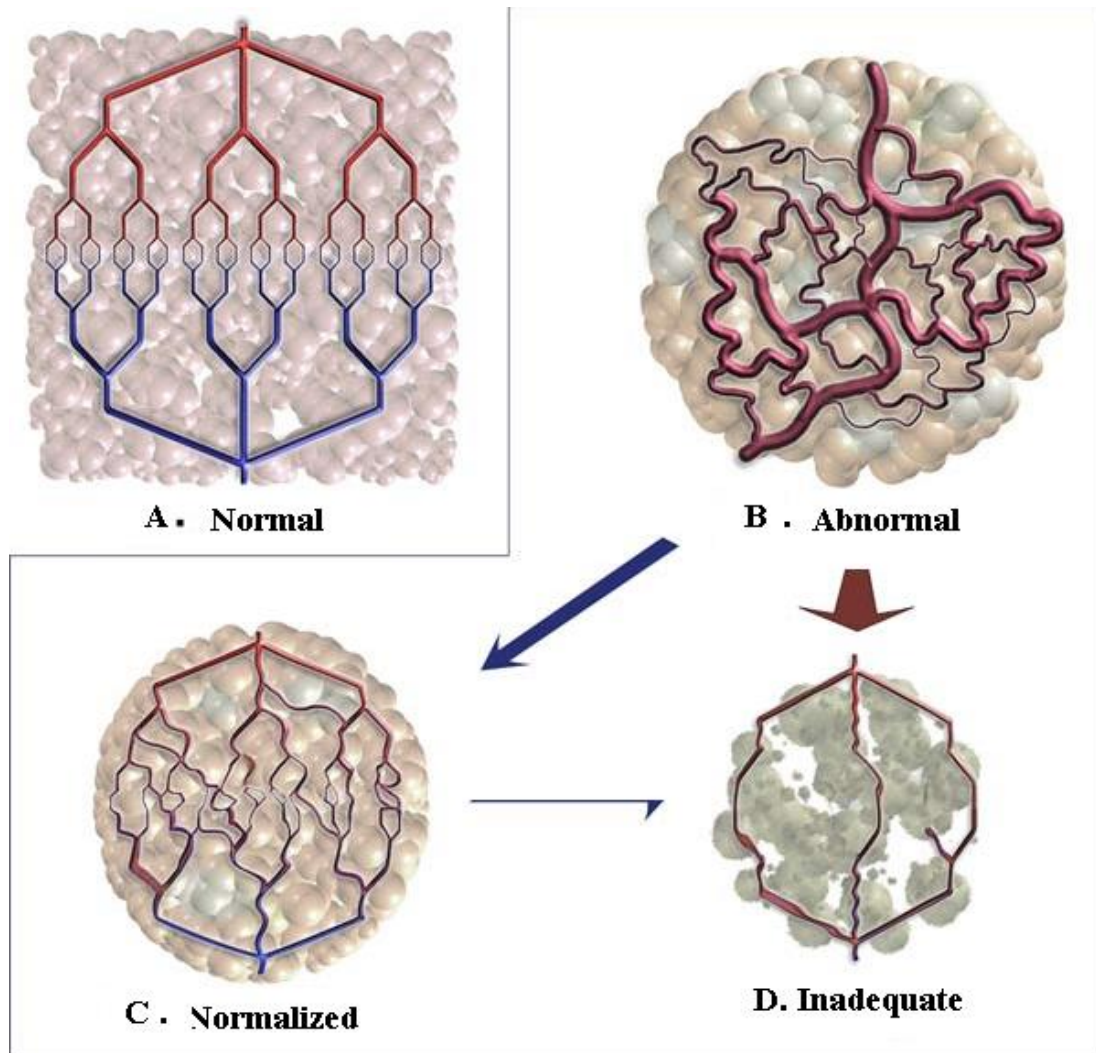


Figura 4.20. Një skemë diagrame e enëve të gjakut, anomalitë tumorale të enëve të gjakut, enët e gjakut të “rinormalizuara” dhe enët e gjakut normale të mbushura në mënyrë të papërshtatshme. Modeli fraktal i qarkullimit të gjakut i lidhur me sistemin kardiovaskular të trupit tonë.

Duke supozuar se vetngjashmëria është karakteristika kryesore e një objekti fraktal, Jayalalitha G. et al (2008), studioi qarkullimin e gjakut në sistemin kardiovaskular dhe vaskular, duke propozuar një model biologjik të vetstrukturuar të ngjashëm me një pemë [44,51]. Data e normës së rregullt të zemrës, sistemi kardiokirusor i njeriut, është një shembull i një sistemi fraktal. Për të vërtetuar hipotezën e tyre, autorët u bazuan te ligji i

Darcy-t, te formula e numrave Reynold dhe te ekuacioni i Poiseuille. Modeli i zhvilluar ka një marrëveshje specifike hapësinore në gjatësinë dhe gjerësinë e degëve të tij kryesore dhe dytësore, varet nga presioni i gjakut dhe gjeometria vaskulare dhe synon një oksigjenim të rregullt të trupit[51]. Autorët kanë zhvilluar një sistem të kompjuterizuar që stimulon kompleksitetin gjeometrik të një ene gjaku me numër të madh të degëve, shpërndarë në mënyrë të parregullt në tre dimensione (gjatësia, gjerësia dhe thellësia).Sasia e qarkullimit (Q = sasia e qarkullimit dhe vëllimi i lëngut që rrjedh përgjatë seksionit të enëve të gjakut në një sekondë) me formulën $Q = A \cdot V$. Ku Q është sasia e qarkullimit së gjakut (ml / sec.); A = zona kryq seksionale e enës së gjakut që konsiderohet; v = shpejtësia e gjakut. Me ekuacionet e Poiseuille-t, autorët marrin parametrat e kontrollit të rrjedhës. Ekuacioni i Poiseuille është: [53, 80]

$$Q = \frac{\pi \Delta P \beta^4}{8 \gamma l}$$

Q = shkalla e qarkullimit, ΔP = ndryshimi i presionit, β = rrezja, γ = viskoziteti i lëngut, l = gjatësia e enës.

Duke parë formulën, ne nxjerrim se faktori më i rëndësishëm për kontrollin e qarkullimit të gjakut është i lidhur me rrezën e gjakut të enës[49]. Raporti forcë viskoze inerciale, jepet nga numri Reynolds dhe shprehet me ekuacionin e mëposhtme:

$$R = \frac{D v l}{\beta}$$

D =diametri i enës, v = shpejtësia, l =gjatësia e enës së trajtuar.

Nëpërmjet numrit Reynolds, ligjit të Darcy-t dhe ekuacionit Poiseuille, Jayalalitha G mori të dhëna në lidhje me ndryshimin në madhësi të fraktaleve në pjesë të ndryshme të sistemit kardiovaskular të njeriut, në subjekte të shëndetshme dhe në subjekte me sëmundje të zemrës dhe çrregullime të tjera qarkullimi. Këto etapa mund të konsiderohen për trajtimin dhe parandalimin e sëmundjeve të zemrës dhe sindromave të tjera të sistemit të qarkullimit, pak a shumë më serioze. Duke filluar nga marrëdhënia bazë systolic, diastolic dhe duke e shumëzuar këtë raport me shumën e numrit Reynolds të një segmenti të caktuar të pemës qarkulluese vaskulare + vlerën e llogaritur nga Poiseuille, duke iu referuar të njëjtin segment dhe zbritur figurën totale të marrë për vlerën negative dhënë nga Ligji Darcy, nxjerrim rezultatin përfundimtar që do të ndahet për 2g (forca e gravitetit). Ky parametër është dimension i fraktal (FD) i pemës qarkulluese të segmentit në fjalë. Nëse vlera devijon nga zbritja korresponduese e segmentit të qarkullimit të gjakut homologë të pemës, raportohet se një person i shëndetshëm i kontrolluar hyn në

patologjinë e qarkullimit të gjakut me një mundësi të një serioziteti të caktuar[50]. Prandaj formula që mat shkallën e patologjisë ose normalitetin e FD i referohet një segmenti të të dhënave të sistemit qarkullues të gjakut:

$$FD = \frac{P.sust}{P.diast} [(R + P) - D] \frac{1}{2g}$$

FD = dimensioni fraktal, duke iu referuar një segmenti të caktuar të pemës së rrjedhës së sistemit të qarkullimit të gjakut Mjekësia e gjakut nën kontroll. P syst. Presioni i gjakut systolic; P diast.= presioni diastolik i gjakut të zemrës; R = numri Reynolds i segmentit të sistemit të qarkullimit të gjakut në fjalë; D = Vlera (e cila është një parametër negativ) dhënë nga formula (Ligji) e Darcy; 2g është forcë e gravitetit. Ne aplikojmë parametrat (numri Reynolds, ekuacioni i Poiseuille), duke përdorur formulën e dhënë më sipër në një segment të arteries cerebrale mesatare të majtë dhe në disa prej degëve të saj të menjëhershme dhe fitojmë një vlerë numerike të caktuar. Nëse kjo vlerë numerike është e ndryshme nga shqyrtimi i një subjekti normal të kontrollit, që ka një dimension fraktal të ndryshëm nga ai normal, segmenti i arteries cerebrale të majtë të konsideruar nga ne, është në një gjendje sëmundjeje pak a shumë të rëndë.

Mënyra më e thjeshtë për të llogaritur FD është duke përdorur vetngjashmërinë. Le të marrim një shembull. Supozoni se ne kemi një segment linje një dimensional. Nëse e shohim atë me zmadhimin e dy të tillëve, do të shohim dy segmente lineare identike dhe $2_1 = 2$, ku 1 tregon dimensionin. Në një kuadër dy dimensional, me zmadhimin e 2, marrim 4 forma identike në të dyja dhe $2_2 = 4$ dhe kështu 2 tregon dimensionin fraktal. Së fundmi, nëse marrim një kub tridimensional dhe dyfishojmë gjatësinë, gjerësinë dhe lartësinë, kemi tetë kube identike, domethënë $2_3 = 8$ dhe 3 tregon dimensionin fraktal. Pra, mund të shohim qartë se, me zmadhimin dhe e ngritjen e tij në fuqinë e dimensionit, numri i formave është marrë. Kjo mund të shprehet si:

$$E^D = N$$

Këtu, E qëndron për zmadhimin, D për dimensionin dhe N për numrin e formave identike. Duke aplikuar logaritmet:

$$D = \log N / \log E,$$

- 1) shtrirja e modifikuar e pikselës.
- 2) metoda perimetrike.
- 3) metoda e numërimit të rregullave dhe
- 4) metoda e numërimit të kutive.

Metoda e numërimit të kutive përdoret më së shpeshti për zbulimin e FD. Është një mënyrë e thjeshtë dhe përcaktuese e matjes së dimensionit fractal

3.Ndikimi i metodave të ndryshme të trajtimit në vlerën e dimensionit fractal të enëve të gjakut.

Njëqind e njëzet minj femra me peshë mesatare - 200 g) në moshën 3 deri në 3,5 muaj, u ndanë në katër grupe (30 minj në secilin grup). Slidet mikroskopike, të cilat u shënuan duke përdorur antitrupa anti-VEGF ose anti-bFGF, u ekzaminuan duke përdorur zmadhim 100x dhe mikrografët e enëve të gjakut u morën në rezolucion 1280×1024 pikësh[53]. Më pas, mikrografët u konvertuan në formatin binar bardh e zi. Ne aplikuum filtrin Laplace duke përdorur matricën e treguar më poshtë:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

micrografet e enëve të gjakut u futën në programin Fractalyse për të llogaritur dimensionin fractal.

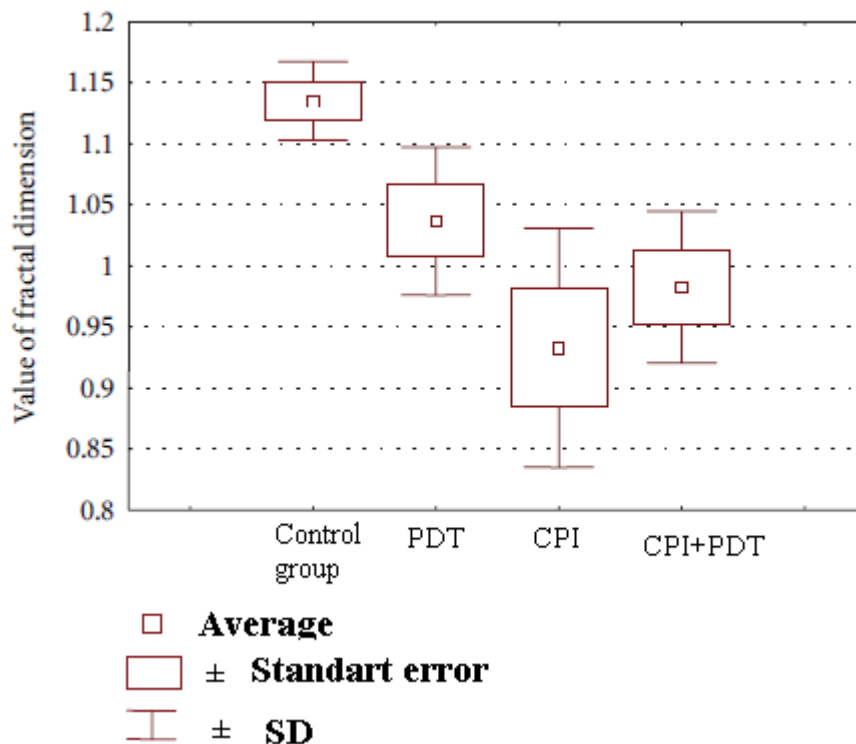


Figura 20 Diagrama e enëve të gjakut

Figura 20 tregon vlerën e FD (dimensionit fraktal) të enëve të gjakut. Vlera më e lartë u shënuar në grupin e kontrollit, dmth 1,135, ndërsa vlera më e ulët u vërejt në

grupin që u trajtua nga inhibitorët proteazë të cisteinës (0,933). Diferencat midis FD në krahasim me grupin e kontrollit u vëzhguan në grupin CPI (Inhibitorët proteazë të cisteinës) dhe në grupin PDT + CPI (0,982). Dimensioni fraktal në grupin PDT (terapia fotodinamike) ishte 1,037. Tabela 1 tregon numrin mesatar të enëve të gjakut kundrejt analizës së dimensionit fractal. Numri më i vogël i enëve të gjakut është parë në grupin e kontrollit (10 për VEGF dhe 8 për bFGF). Numri më i madh i enëve të gjakut u vërejtën në grupin PDT (17 për VEGF dhe 15 për bFGF) dhe në grupin PDT + CPI (18 për VEGF dhe 12 për bFGF).T+CPI (18 për VEGF dhe 12 për bFGF).

Tabela 2

Numri mesatar i enëve të gjakut në një grup kafshësh të trajtuar me metoda të ndryshme.

	Numri mesatar i enëve të gjakut			
	Grupi i kontrollit PDT		CPI	PDT+CPI
VEGF	10	17	11	18
BFGF	8	15	8	12
FD	1,135	1,037	0,933	0,982

4.2 Diskutime

Aplikimi i PDT, CPI dhe i të dyja metodave së bashku, çojnë në uljen e dimensionit fraktal. Vlera më e ulët e FD është vërejtur në grupin PDT + CPI, duke treguar kështu që terapia e kombinuar rezulton në një organizim më pak kaotik të enëve të gjakut. Krahasimi i FD me sasinë e enëve të gjakut zbuloi se forma e enëve të gjakut u ndryshua në një formë më të rregullt, por sasia e enëve ishte e ngjashme [80, 81].

Analiza e dimensionit fraktal të enëve të gjakut mund të jetë një mjet shumë efikas që mundëson krahasimin e formës dhe shpërndarjen e enëve në sipërfaqje. FD përdoret gjerësisht në analizat e formave në teknika të ndryshme të vizualizimit, për shembull fotot me rreze X, ultrasonografia dhe tomografia e kompjuterizuar. Analiza e dimensionit fraktal kërkon procedura që mundësojnë ndarjen e formës dhe të sfondit të ekzaminuar. Në slideve mikroskopike të shënuara me metodën rutinë hematoxylin-eosin dinamika e ngjyrave është e dobët, gjë që mund të krijojë vështirësi në ndarjen automatike të

formave të ekzaminuara. Sistemet kompjuterike kërkojnë imazhe të forta të kontrastit (shumë e dobishme është ngjyrosja kundër CD34 në rastin e analizës së enëve të gjakut). Edhe algoritmet e veçanta për të kërkuar format e ekzaminuara, janë gjithashtu të nevojshme.

4.3 Konkluzione dhe rekomandime

Matematika është një mjet i rëndësishëm për të kuptuar se cilat forma të jetës dhe natyrës janë rezultat i rregullsisë që mund të përshkruhen nga ana matematikore për ne. Mjetet për t'u afruar me një qasje holistike në mjekësi, në emër të një strategjie analitike dhe të reduktuar, në të cilën të gjitha fenomenet, simptomat, sëmundjet ndiqen dhe gjurmohen në karakterin e mekanizmave molekulare, duke humbur një vizion të unifikuar thelbësor. Studimet Mandelbrot për gjeometrinë fraktale japin një kontribut të veçantë në kërkimet mjekësore dhe biologjike duke ndihmuar në prezantimin e një vizioni të ri, shumë unifikues të fenomenit të jetës dhe një qasje të unifikuar në trajtimin e sëmundjes dhe personit të sëmurë. Shembujt e përzgjedhur do të kontribuojnë për të përshkruar forma dhe struktura komplekse biologjike si entitete fraktale dhe, gjithashtu, të tregojnë pse aplikimi i parimit fraktal është i vlefshëm për matjen e parametrave dimensionale, gjeometrike dhe funksionale të qelizave, indeve dhe organeve që ndodhin brenda sferës së bimëve dhe kafshëve.[80] Nëse plotësohen kriteret për një përshkrim të rreptë të fraktaleve natyrore, atëherë rrjedh se mund të parashikohet një "gjeometri fraktale e jetës" dhe të gjitha objektet natyrore dhe sistemet biologjike që shfaqin modele të vetngjashme dhe karakteristika të shkallëzuara mund të konsiderohen si pjesë e nëndisiplinës së re të fraktologjisë.

PËRFUNDIME DHE PROBLEME TË HAPURA

1. Është bërë një studim i lidhjes që ekziston mes zbërthimit të numrave në bazë β , ku β është një numër Pisot dhe Dinamikës Simbolike.
2. Të kuptohem më mirë lidhja ndërmjet zbërthimit beta Spektrit të numrave Pisot dhe strukturave quazikristaline.
3. Cilat rezultate mbeten të vërteta në zbërthimit beta nëse marrim zbërthimin lazy ? Kush janë pohimet ekuivalente ?
4. Janë studiuar vetitë e tailing konkretisht i tailing që gjenerohet nga ekuacioni i fuqisë së 3 dhe nga ekuacioni:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 1$$

Është interesant ky rast, sepse jep shembullin e një tailing, i cili është jo i lidhur. Deri para pak kohësh mendohej se të gjitha tailing e gjeneruara nga numrat Pisot ishin të lidhura. figura është programuar në *Matematica*, një program që bën paraqitjen e projeksionit në plan të tailing të formuar nga ekuacioni $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 1$

5. Është dhënë një rast se si ky koncept mund të zbatohet në mjeksi.
6. Studimi dhe klasifikime të tjera për tailin e lidhur apo të palidhur për fuqi më të mëdha se 4, sfidë jo shumë e lehtë.

Bibliografia:

1. Fractals in Biology and Medicine: *Volume IV*, 2005
2. B.B. Mandelbrot: The fractal Geometry of Nature (W. H. Freeman, San Francisco 1982)
3. Falconer KJ: Hausdorff measure and dimension. In: Fractal geometry mathematical foundation and applications. John Wiley, Cambridge, 1990
4. Fractal Applications to Medicine
5. Kenneth Falconer: Fractal geometry mathematical foundation and applications. John Wiley, Second Edition, 2003
6. Lucas N. H. B, Phillip S. J, Jack D. B: The Historical Roots of Elementary Mathematics. Dover, 1988
7. A. Rényi: Representations for real numbers and their ergodic properties. 1957
8. <http://datagenetics.com/blog/january12016/index.html>
9. Shigeki Akiyama: On the boundary of self affine tilings generated by Pisot numbers, 2002
10. Bert Mendelson: Introduction to topology, third Edition 1990
11. Mishel Fundo: Hyrje ne Analizen Matematike: 1988
12. Colin Adams, Robert Franzosa Introduction to topology Pure and applied 2009
13. Qamil Haxhibeqiri , Topologi
14. Valérie Berthé, Michel Rigo. Combinatorics, Words and Symbolic Dynamics, Cambridge University Press 2016.
15. Kristaq Filipi Algjebër Abstrakte, Tiranë 2013
16. M. Lothaire, Algebraic Combinatorics on Words, Cambridge University Press 2002
17. M. Lothaire , Combinatorics on words, Cambridge University Press 1997
18. Fean Berstel, Aaron Lauve, Christophe Reutenauer, Franco Salvia Combinatorics on words: Christoffel Words and Repetition in Words 2008
19. O. Neugebauer : The exact Sciences in Antiquity second edition , Dover 1969
20. Kevin G. Hare : Beta – expansions of Pisot and Salem numbers: 2007
21. Generalized golden ratios in ternary alphabets, Marco Pedicini, Numeration and Substitution 2014, University of Debrecen, July 7-11, 2014
22. P. Erdős, I. Joó, and V. Komornik. On the number of q -expansions. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., 37:109–118, 1994.
23. I. Joó, and F. J. Schnitzer. On some problems concerning expansions by noninteger bases. Anz. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl., 133:3–10 (1997), 1996.
24. P. Borwein and K. G. Hare. General forms for minimal spectral values for a class of quadratic Pisot numbers. Bull. London Math. Soc., 35(1):47–54, 2003.
25. K. G. Hare. The structure of the spectra of Pisot numbers. J. Number Theory, 105(2):262–274, 2004.
26. Shigeki Akiyama: Cubic Pisot units with finite beta expansions , 1998
27. Charlene Kalle , Lecture notes for the Winter School on Multifractals and Number Theory , May 24, 2013
28. C. Frougny and B. Solomyak ; Finite beta – expansions : Ergod. Th. & Dynam. Sys (1992) , 12, 713-723

29. Gjini. N, A self-similar tiling generated by the pisot numbers which is the root of the equation $x^3 - x^2 - 1 = 0$, Osaka J. Math 38 (2001) 303-319
30. Shigeki Akiyama, Gjini. Nertila , Connectedness of number theoretic tilings , Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, DMTCS, 2005, 7, pp.269-312
31. Gjini. N, Pisot dual tilings of low degree and their disconnectedness , Albanian Journal of Mathematics, Volume 6, Number 1, Pages 21–32 ISSN: 1930-1235; (2012)
32. Ivan Niven, Herbert S. Zuckerman, Hugh L. Montgomery , An introduction to the theory of numbers , 5th ed.1991 by John Wiley & Sons, Inc.
33. Charles Scarr, On Pisot and Salem Numbers
34. Bertin, M.-J.; Decomps-Guilloux, A.; Grandet-Hugot, M.; Pathiaux-Delefosse, M.; Schreiber, J.-P., Pisot and Salem numbers. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992
35. Douglas Lind , Matrices of Perron numbers Journal of number theory 40, 211-217 (1992).
36. Salem, R., A remarkable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan. Duke Math. J. 11 (1944), 103-108.
37. Kronecker, L.. "Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten.." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 53 (1857): 173-175
38. Shigeki Akiyama and Jörg Thuswaldner, On the Topological Structure of Fractal Tilings Generated by Quadratic Number Systems, Comput. Math. Appl. 49 (2005) 1439-1485
39. Petr Ambroz , Propriétés algébriques et combinatoire des numerations non-standard, PHD Thèse 2006 , 10
40. E. Selmer, On the Irreducibility of Certain Trinomials, Math. Scand. 4 (1956), 287–302.
41. Shigeki Akiyama: Pisot number system and its dual tiling. NATO SECURITY THROUGH SCIENCE SERIES Vol.7 , 2007, Physics and Theoretical Computer Science , Jean-Pierre Gazeau et al. (Eds.) IOS Press, 2007, 133-154
42. Arben Baushi: Hyrje në topologji
43. John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman , Introduction to Automata Theory, Languages and computation, 2ed. 2001
44. Jayalalitha G, Shanthoshini Deviha V, Uthayakumar R, Fractal model for blood flow in cardiovascular system. [Comput Biol Med](#). 2008 Jun;38(6):684-93. doi: 10.1016/j.compbiomed.2008.03.002. Epub 2008 May 8.
45. Frances E. Lennon, Gianguido C. Cianci, Rajani Kanteti,...Unique fractal evaluation and therapeutic implications of mitochondrial morphology in malignant mesothelioma : 15 April 2016 Scientific Reports
46. Khan M. Iftekharuddin ,Wei Jia:Fractal analysis of tumor in brain MR images : Khan M. Iftekharuddin ,Wei Jia , Ronald Marsh Machine Vision and Applications (2003) 13: 352–362
47. Fractals in Biology and Medicine : Volume III , 2002
48. S. HAVLIN, S.V. BULDYREV, A.L. GOLDBERGER, RN, ...Fractals in Biology and Medicine : Chaos. Solitons & Fractals Vol. 6, pp. 171-201, 1995
49. Budetta Giuseppe Costantino: Dimensione Frattale in Biologia ed in Medicina Umana : Aprile 6, 2009

50. Lucia Della Croce: Matematica applicata alla Biologia : Dipartimento di Matematica - Università di Pavia 2009/2010
51. Jayalalitha G. et al: Fractal model for blood flow in cardiovascular system.: Computer in Biology and Medicine, 38, 684 – 693 (2008).
52. Bargerion GB, Hutchins GM, 10Moore GW, Deters OJ, Mark FF, Friedman MH, Distribution of geometric parameters of human aortic bifurcations. .: Arteriosclerosis 6:109-113 (1986).
53. Cross, S.S., :Fractals in pathology. 1988. J Pathol. 182, 1-8.
54. R. Salem, Algebraic Numbers and Fourier Analysis, Heath 1963, ISBN 053498049X
55. A. Potter, Pisot Numbers, www.scieng.ed.ac.uk/students/awards/Potter.pdf
R.M.Aarts and W.W.Weisstein, Jensen's Formula, <http://mathworld.wolfram.com/JensensFormula.html>
56. M. J. Mossingho, Polinomet me Small Mahler Measure, Mathematics of Computation Vol. 67 No. 224, Oct 1998 pp 1697-1705
57. C. J. Smyth, On the Product of the conjuguari Outside the Unit Circle of an Algebraic Integer, Bulletin of the London Mathematical Society no. 3, 1971, pp169-175
58. E. Hironaka, The Lehmer Polynomial and Pretzel Links, Canadian Mathematical Bulletin no. 44, 2001 pp 440-451
59. K. Schmidt, Dynamical Systems of Algebraic Origin, Progress in Mathematics, Birkhauser Basel, 1995 ISBN 3764351748
60. C. L. Siegel, Algebraic Numbers whose conjuguari Lie in the Unit Circle, Duke Mathematical Journal Vol. 11, 1944 pp597-602
61. M. J. Mossingho, Lehmer's Problem, <http://www.cecm.sfu.ca/~mjm/Lehmer/>
62. E. Bombieri and J. Vaaler, Polinomet with Low Height and Prescribed Vanishing, Progress in Mathematics Vol. 70, Birkhauser Boston, 1987 pp53-73
63. P. Borwein, E. Dobrowolski, M. Mossingho, Lehmer's Problem for Polinomet with Odd Coefcients, Annals of Mathematics, Vol. 166, no. 2, 2007 pp347-366
64. Valentina Shehu: topologji e Përgjithshme “Jozef” Durrës -2015
65. Sh.Akiyama, T. Sadahiro A self –similar tiling by the minimal Pisot numbers : Acta Math. Info. Univ. Ostraviensis 6 (1998), Proceedings of 13th Czech and Slovak Conference on Number Theory, 9-26
66. V'ictor F. Sirvent and Yang Wang : Self-affine tiling via substitution dynamical systems and rauzy fractals , pacific journal of mathematics vol. 206, no. 2, 2002
67. Tej Bahadur Singh: Introduction to Topology, © Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2019
68. M. J. Mossingho, G. Rhin and Q. Wu, Minimal Mahler Measures, Experimental Mathematics Vol. 17, no. 4, 2008 pp451-458
69. G. Rhin and J. -M. Sac-Epee, New Methods Providing High Degree Polinomet with Small Mahler Measure, Experimental Mathematics, Vol. 12, no. 4, 2003 pp457-462
70. P. E. Blanksby, H. L. Montgomery, Algebraic Integers Near the Unit Circle, Acta Arithmetica Vol. 18, 1970 pp355-369
71. C. L. Harris, Algebraic Integers Whose conjuguari Lie Near the Unit Circle, Bulletin de la Societ e Matheematique de France Vol. 106, 1978 pp169-176

72. [17] E. Dobrowolski, On a Question of Lehmer and the Number of Irreducible Factors of a Polynomial, Acta Arithmetica Vol. 34, 1979 pp391-401
73. P. Voutier, An Effective Lower Bound for the Height of Algebraic Numbers, Acta Arithmetica Vol. 74, 1996 pp81-95
74. E. Dobrowolski, W. Lawton and A. Schinzel, On a Problem of Lehmer, Studies in Pure Mathematics, Birkhauser Basel, 1983 pp135-144
75. E. Dobrowolski, Mahler's Measure of a Polynomial in Function of the Number of its Coefficients, Canadian Mathematical Bulletin Vol. 34, 1991 pp186-195
76. E. Dobrowolski, Mahler's Measure of a Polynomial in Terms of the Number of its Monomials, Acta Arithmetica Vol. 123, 2006 pp201-231
77. E. Dobrowolski, On a question of Lehmer, Meemoires de la Socieet e Matheematique de France, 1980-81 pp35-39
78. A. Dubickas and C. J. Smyth, On the Lines Passing Through Two conjuguari of a Salem Number, Mathematical Procwdings of the Cambridge Philosophical Society Vol. 144, 2008 pp29-37
79. <http://www.mathcurve.com/fractals/koch/koch.shtml>
80. A. Baushi , K. Baushi , Fractal Application to Medicine .Proceedings of 6- 8 - th International Multidisciplinary Conference on Medical Specialties Elbasan 27-29 May 2016 (PROCEEDING BOOKS)
81. A. Baushi , K. Baushi Fractal Application to Medicine . Proceedings of 6-8-th International Multidisciplinary Conference on Medical Specialties Elbasan 27-29 May 2016, ISBN 978-9928-08-229-9
82. A. Baushi ,Characteristic of tiling generated by a root of polynomial of degre 4, VI Congress of the Mathematicians of Macedonia June 15-18, 2016
83. A. Baushi ,Numrat Pisot dhe Salem, kërkime në artikuj të ndryshëm , A. Baushi Takimit XI te IASH-se, Tirane, Shqiperi, 01-03 Shtator 2016.
84. A. Baushi Disa vështirime mbi pisetët dhe lidhshmërine e tiling të perfituar nga këta numra Takimit XII te IASH-se, Prishtine, Shqiperi, 01-03 Shtator 2017.
85. Arben BAUSHI, Orgest ZAKA, Olsi XHOXHI, Some property of Beta expansions , UBT International Conference 2017, Durrës Albania October 27-29, 2017
86. A. Baushi , Characteristic of tiling generated by a root of polynomial $P(x)=x^4-3x^3+x^2-2x-1$, JMEST Vol 6 Issue 2, February -2019 , ISSN: 2458-9403

Shtojca:

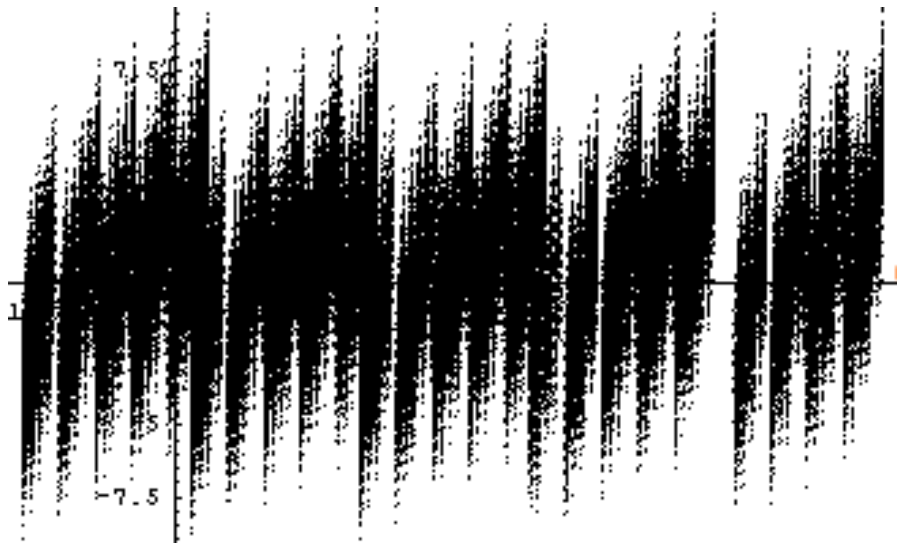


Figura 18. Fraktal i palidhur i fuqisë 4 [kodi]

**Label[example of the case where alltiles are disconnected
long program];**

```
Clear[x,b,a,bb,c,cc,k,h,hh,y];a=3;b=-1;c=2;
bb=N[Root[x4-a x3-b x2-c x-1,2]];
cc={N[Root[x4-a x3-b x2-c x-1,1]],N[Root[x4-a x3-b x2-c x-
1,3]]};
hh=10000;
h[x_]:=bb x-Floor[bb x];k[x_]:=Floor[bb x];
cord[z_]:={Extract[z,1],Im[Extract[z,2]]};
```

```
zpoint[x_]:=Fold[cc #1+#2&,0,Map[k,NestList[h,x,2]]];
zpoint1[x_]:=Fold[cc #1+#2&,0,Map[k,NestList[h,x,3]]];
zpoint2[x_]:=Fold[cc #1+#2&,0,Map[k,NestList[h,x,4]]];
zpoint3[x_]:=Fold[cc #1+#2&,0,Map[k,NestList[h,x,5]]];
zpoint4[x_]:=Fold[cc #1+#2&,0,Map[k,NestList[h,x,6]]];
zpoint5[x_]:=Fold[cc #1+#2&,0,Map[k,NestList[h,x,8]]];
zpoint6[x_]:=Fold[cc #1+#2&,0,Map[k,NestList[h,x,11]]];
zpoint7[x_]:=Fold[cc #1+#2&,0,Map[k,NestList[h,x,14]]];
zpoint8[x_]:=Fold[cc #1+#2&,0,Map[k,NestList[h,x,15]]];
zpoint9[x_]:=Fold[cc #1+#2&,0,Map[k,NestList[h,x,17]]];
zpoint10[x_]:=Fold[cc #1+#2&,0,Map[k,NestList[h,x,18]]];
```

```
zpoint11[x_]:=Fold[cc #1+#2&,0,Map[k,NestList[h,x,19]]];  
zpoint12[x_]:=Fold[cc #1+#2&,0,Map[k,NestList[h,x,20]]];
```

```
Graphics[{PointSize[0.01],RGBColor[1,0,0],  
  Point[cord[4+4cc+cc3/((1-cc)(1+cc2))]]},  
Graphics[{PointSize[0.01],RGBColor[1,1,0],  
  Point[cord[4+3cc+2cc3+cc6/((1-cc)(1+cc2))]]},  
Graphics[{PointSize[0.01],RGBColor[1,0,1],  
  Point[cord[4+4cc+4cc2+cc4/((1-cc)(1+cc2))]]}]
```

```
},Axes→True];
```