



**REPUBLIKA E SHQIPERISË
UNIVERSITETI “ISMAIL QEMALI”, VLORE
FAKULTETI I SHKENCAVE TEKNIKE
DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS**



DISERTACION
PËR GRADËN SHKENCORE
“DOKTOR”

EKUACIONI I VALËS UJORE
METODAT NUMERIKE DHE APLIKIME

Programi i studimit

Probabilitet, Statistikë Matematike dhe Analizë Numerike

Kandidat

MSc. Shkëlqim HAJRULLA

Udhëheqës shkencor

Prof. Dr. Fatmir HOXHA

Vlorë, 2019



**REPUBLIKA E SHQIPERISË
UNIVERSITETI “ISMAIL QEMALI”, VLORE
FAKULTETI I SHKENCAVE TEKNIKE
DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS**



**EKUACIONI I VALËS UJORE
METODAT NUMERIKE DHE APLIKIME**

Doktorant

MSc. Shkëlqim HAJRULLA

Udhëheqës shkencor

Prof. Dr. Fatmir HOXHA

Disertacion
i
paraqitur nga :

Z. Shkëlqim Hajrulla

për marrjen e gradës shkencore

DOKTOR

Miratohet më date ____ / ____ / 2019 para jurisë

1. _____ Kryetar
2. _____ Anëtar (Oponent)
3. _____ Anëtar (Oponent)
4. _____ Anëtar
5. _____ Anëtar

Vlorë, 2019

MIRËNJOHJE

Kjo temë përmban kërkimin tim shkencor si student i doktoraturës në Departamentin e Matematikës në Universitetin e Vlorës. Kushet e punës dhe të kërkimit në Departamentin e Matematikës si në Departamentin e Matematikës në Universitetin e Vlorës, ashtu dhe në Departamentin e Matematikës në Universitetin e Tiranës kanë qenë të shkëlqyera.

Në radhë të parë, do të doja të falënderoja udhëheqësin tim, Prof. Dr. Fatmir Hoxha. Interesi i tij i sinqertë për këtë punë ka qenë për mua një nga burimet më të rëndësishme të motivimit. Unë jam shumë mirënjohës për mbështetjen e tij të vazhdueshme dhe për shumë diskutime që kemi pasur dhe që ishin aq të rëndësishme për këtë tezë. Në sajë të udhëheqjes dhe bashkëpunimit të vazhdueshëm me Profesorin, unë arrita të punoj me një metodë të përshtatshme numerike dhe të kem rezultate në aplikimet kompjuterike.

I jam mirënjohës Departamentit të Matematikës në Universitetin e Vlorës, Departamentit të Matematikës së Aplikuar të Fakultetit të Shkencave Natyrore në Universitetin e Tiranës për ndihmën e tyre dhe për orientimin e shkëlqyer që më dhanë për kërkimin tim shkencor.

Gjithashtu, jam mirënjohës edhe ndaj kolegëve me të cilët kam bashkëpunuar në shkollën verore turke dhe në Departamentin e Matematikës në Padova, që më dhanë njohuri të mira në lidhje me ekuacionin e valës së ujit dhe gjithashtu dua të falënderoj edhe Prof. As. Erhan Pişkin të Universitetit të Stambollit, pasi më ka sugjeruar probleme të reja dhe për bashkëpunimin interesant dhe të frytshëm. Së bashku me Prof. Dr. Fatmir Hoxha, ai më udhëzoi në shumë probleme të diskutuara gjatë studimeve të PhD dhe në disa artikuj të përbashkët.

Në fund dua të falënderoj familjen time. Tre vitet e fundit kanë qenë vite të një pune të madhe dhe të sukseshme, ashtu si dhe gjithë puna ime shkencore gjatë viteve. Por gjithashtu kanë qenë vite të lumtura falë familjes sime dhe veçanërisht vajzës sonë shumë të dashur.

PËRMBLEDHJE

Qëllimi i kësaj teze doktorate është studimi i ekuacionit të valëve ujore dhe në veçanti i valëve të cekëta ujore duke përdorur metodat numerike dhe format diferenciale të përshtatshme. Në veçanti studiojmë problemin e ekuacionit të valës për një klasë ekuacionesh eksponenciale dhe logaritmike me problemin e vlerave fillestare duke pasur si qëllim ndërtimin e një funksioni përafrues për studimin dhe gjetjen e zgjidhjes së ekuacionit të valës ujore. Një vëmendje e veçantë i kushtohet nxjerrjes dhe përafrimit të zgjidhjeve për ekuacionet të cilat përshkruajnë përhapjen e valëve ujore duke përdorur metodat numerike dhe më pas duke i analizuar dhe diskutuar teorikisht dhe me llogaritje kompjuterike. Në literaturë trajtohen disa metoda numerike të cilat janë relativisht të gjata dhe paraqesin vështirësi në ekzekutim. Metoda e përafrimit të zgjidhjeve me një polinom, e propozuar në këtë punim, na jep një rezultat të arsyeshëm. Ajo është një metodë më efektive dhe më e thjeshtë në llogaritje. Në këtë punim bëhet studimi i cilësive të çdo metode të përdorur duke specifikuar kompleksitetin dhe efektshmërinë. Këto bëjnë të mundur që të përdorim metodën më efikase në studimin e ekuacionit të valës ujore për të arritur në përfundimin e kërkuar dhe në një aplikim sa më të pranueshëm. Disa shembuj numerikë, algoritme dhe njehsime janë paraqitur. Meqënëse gjatë arsyetimit hasen njehsime të shumta, ne mund ta optimizojmë algoritmin e zgjidhjes dhe ta aplikojmë atë duke përdorur software të ndryshëm.

Fjalët kyçe: ekuacioni i valës ujore, vlera vetjake, zgjidhje e përgjithshme, uji i cekët, ekuacioni KdV, ekuacioni C-H, metodat numerike, përafrimi i zgjidhjeve.

ABSTRACT

The aim of this PhD thesis is the study of water wave equation, in particular the shallow water wave equations using the numerical methods and differential forms. In particular we study the initial boundary value problem for a class of logarithmic higher order wave equation, with the aim to construct an approximate function to study and obtain the solution of water wave equation. A special attention is given to derivation and approximation of solution for the equations which describe the propagation of water wave using numerical methods and then analyzed and discussed theoretically and computationally. The approximation method with a polynomial, proposed in these, gives a reasonable result. It is more effective method and simpler in calculations. In this paper, are studied of the qualities of each method used by specifying complexity and effectiveness. These will enable us to use the most efficient method in studying of the water wave equation to reach the desired conclusion and in a more acceptable application. Some numerical examples, algorithms and calculations are presented. As this analysis involves very complicated computation, we can optimize the algorithm of solution and can apply it using several softwares.

Keywords: water wave equation, eigenvalue, general solution, shallow water, KdV equation, C-H equation, numerical methods, approximation of solution.

PËRMBAJTJA

HYRJE	iii
-------------	-----

Kapitulli I. Valët ujore, ekuacionet e valës ujore dhe hapësirat e rendeve të larta

1.1 Njohuri mbi valët ujore dhe llojet e tyre	9
1.2 Ekuacionet e valëve ujore	11
1.3 Eksperimente të valës së ujit dhe vëzhgime.....	16
1.4 Hapësirat me përmasa të rendeve të larta.....	17
1.5 Hapësira Sobolev dhe hapësira $L^p(\Omega)$	19

Kapitulli II. Teoria e ekuacionit të valës ujore

2.1 Vështrim i shkurtër mbi ekuacionet e valës ujore	25
2.2 Problemi i vlerës fillestare në ekuacionin e valës ujore me term logaritmik	27
2.3 Zgjidhja globale e dobët dhe teorema kryesore.....	28
2.4 Ekuacioni i valës ujore me term logaritmik	31
2.5 Vlerësimet e zgjidhjes	34

Kapitulli III. Ekuacioni i valës së ujit të cekët

3.1 Njohuri mbi ekuacionet e valës së ujit të cekët.....	38
3.2 Ekuacioni Camassa-Holm.....	43
3.2.1 Struktura matematikore e ekuacionit Camassa-Holm	43
3.2.2 Egzistenca globale e zgjidhjes për ekuacionin Camassa-Holm	46
3.2.3 Teoria themelore e egzistencës së zgjidhjes	50
3.3 Aplikimi i problemit të vlerës fillestare në ekuacionin logaritmik të valës.....	53
3.4 Energjia e valës ujore në koordinatat langrazhiane	59

Kapitulli IV. Përafrime të zgjidhjes, aplikime dhe rezultatet numerike

4.1 Metodat numerike.....	67
4.2 Teorite bazë të përafrimit.....	73
4.3 Metoda e përafrimit të zgjidhjes me një polinom....	77
4.3.1 Gabimi i përafrimit	78
4.3.2 Përafrimi i zgjidhjes me një polinom.....	79

4.3.3 Kushti kufitar i thjeshtë	85
4.3.4 Rezultatet numerike.....	91
4.4 Aplikimi në probleme të turbullimit.....	93
4.5 Rezultate numerike për valët e ujit të cekët paraqitur në 1D dhe 2D	109
Përfundime dhe rekomandime.....	115
Referencat	117

LISTA E FIGURAVE

Fig.1 Valët në plazh	10
Fig.2 Dallgë uji dhe valët e ujit të cekët	11
Fig.3 Koordinatat dhe vala periodike në sipërfaqen e ujit	13
Fig.4 Konfigurimi për modelin gjeofizik të valës së ujit.....	15
Fig.5 Konfigurimi për modelin gjeofizik të valës së ujit të cekët	15
Fig.6 Grafiku i thyerjes së valës	82
Fig.7 Sipërfaqja drejtëkëndore me përmasa a dhe b për problemin e valës ujore.....	82
Fig.8 Ndërtimi i një baze ortogonale në hapësirën 2-përmasore R^2	101
Fig.9 Koha e ekzekutimit në klaster për mbledhjen e dy vektorëve.....	102
Fig.10 Koha e ekzekutimit në klaster për shumëzimin e dy matricave	103
Fig.11 Koha e ekzekutimit në klaster për algoritmin e eliminimit të Gausit.....	104
Fig.12 Vala ujore në $t=1$	105
Fig.13 Vala ujore në $t=4$	105
Fig.14 Vala ujore në $t=7$	106
Fig.15 Vala ujore në $t=10$	106
Fig.16 Shpejtësia horizontale e valës	107
Fig.17 Shpejtësia vertikale e valës	107
Fig.18 Vala ujore në koeficientin e deformimit 0.4.....	108
Fig.19 Krahësim i valës me koeficientin e deformimit 0.4	108
Fig.20 Paraqitje e valës së ujit të cekët	109
Fig.21 Paraqitje e valës nën pikën kritike $h_0/h_1 > 0.5$	109
Fig.22 Paraqitje e valës nën pikën kritike $h_0/h_1 < 0.5$	110
Fig.23 Paraqitje e valës nën pikën kritike $h_0/h_1 \ll 0.5$	110
Fig.24 Paraqitje e lartësisë së valës	111
Fig.25 Paraqitje e fuksit të valës së thyer	111
Fig.26 Paraqitje e shpejtësisë gjatë thyerjes së vales	112
Fig.27 Paraqitje e nivelit të ujit të valës në pikën kritike	112
Fig.28 Paraqitje e fluksit të ujit të valës në pikën kritike	113
Fig.29 Thyerja e valës në $h_d = 5$ m	113
Fig.30 Thyerja e valës në $h_d = 0.1$ m	114
Fig.31 Thyerja e valës në $h_d = 0$ m	114

HYRJE

Arsyeja e përzgjedhjes së temës

Studimi i ekuacionit të valëve dhe veçanërisht i ekuacionit të valëve ujore ka marrë një zhvillim të vrullshëm gjatë 2 dekadave të fundit për shkak të aplikimeve të shumta. Zhvillimi i teknologjisë në ditët e sotme ka mundësuar që mjaft ekuacione të valëve të studiohen me algoritme të avancuara që mbështeten në metoda kompjuterike paralele.

Pikërisht, duke u fokusuar në metodat numerike, do të studiojmë ekuacionin e valëve ujore dhe në veçanti atë të valëve të cekëta ujore duke u përpjekur të japim një kontribut në përafrimin e zgjidhjeve të këtyre ekuacioneve me metoda numerike të optimizuara si dhe në aplikime.

Rëndësia e punimit

Rezultatet e pritshme në aplikimin tonë do të bëjnë të mundur të ndikojmë në efikasitetin e metodave të përdorura në kombinimin e zgjidhjeve globale të problemit.

Rëndësia e punimit qëndron gjithashtu në faktin se të gjitha metodat mbështeten në metodat numerike të studimit të ekuacionit të valëve ujore duke hapur rrugën për aplikime të reja. Ne mund ta optimizojmë rezultatin e zgjidhjes dhe ta aplikojmë atë.

Objektivat

1. Studimi i zgjidhjeve të ekuacionit të valës ujore për një klasë ekuacionesh eksponenciale me problemin e vlerave fillestare.
2. Ndërtimi i një funksioni përafrues për studimin e ekuacionit të valës ujore.
3. Të arrijmë të trajtojmë sjelljen e energjisë së valës dhe optimizimin e rezultatit të zgjidhjes.
4. Gjetja dhe përdorimi i metodës më të përshtatshme për studimin e përafrimit të zgjidhjes.

Metodologjia

Metoda e studimit do të jetë ajo e metodave numerike dhe formave diferenciale nëpërmjet analizës, sintezës dhe krahasimit. Kjo do të realizohet nëpërmjet një studimi të cilësive të çdo metode të përdorur duke specifikuar kompleksitetin dhe efektshmërinë. Këto do të bëjnë të mundur që të përdorim metodën më efikase në studimin e ekuacionit të valës ujore për të arritur në përfundimin e kërkuar dhe në një aplikim sa më të pranueshëm në kushtet e një disipline të caktuar.

Përshkrim i shkurtër sipas kapitujve

Në kapitullin e parë jepen njohuritë bazë, përshkrimi historik i ekuacionit të valës ujore, konceptet themelore teorike mbi ekuacionin e valës ujore, përkufizime dhe koncepte shtesë lidhur me njohuritë bazë për zhvillimin e temës në tërësi. Njihemi me ekuacionin bazë të valës ujore dhe mandej përmendim ekuacionin themelor, ekuacionin Camassa–Holm, i cili trajton valët e ujit të cekët.

Në kapitullin e dytë, shqyrtohet problemi logaritmik i ekuacionit të valës së ujit. Duke studiuar hapësirën Sobolev, duke futur mosbarazimin logaritmik Sobolev dhe duke përdorur kombiminim e metodave, konsiderojmë teoremën e ekzistencës së një zgjidhjeje të përgjithshme për problemin e vlerës fillestare dhe kufitare të ekuacionit logaritmik të valës së ujit. Vërtetimi i teoremës kryesore është dhënë duke shfrytëzuar njohuritë mbi hapësirën Sobolev, ekuacionet dhe inekuacionin përkatës Sobolev, si edhe disa lema dhe teorema të trajtuara. Ne sjellim disa njohuri për të përfutur vlerësimet e sjelljes së energjisë së valës për ekuacionin logaritmik të rendit të lartë të valës. Trajtojmë edhe sjelljen e zgjidhjes së ekuacionit ndërkohë që funksioni i duhur rritet eksponencialisht dhe më pas shohim aplikimin.

Në kapitullin e tretë shqyrtojmë ekuacionin e valës së ujit të cekët. Në veçanti studioj ekuacionin Camassa-Holm. Rrjedhat dhe valët e cekëta të ujit karakterizohen nga rajone rrjedhjeje në një sipërfaqe të lirë. Ekuacionet e valës së ujit të cekët formojnë një sistem jo linear. Ekuacionet shpesh pranojnë zgjidhje jo të vazhdueshme dhe zgjidhjet analitike janë të limituara dhe në shumë pak raste të idealizuara. Shumica e metodave kompjuterike për simulimin e rrjedhave dydimensionale janë të bazuara fuqimisht në teknikat numerike të përdorura për modelimin e rrjedhave njëdimensionale.

Kapitulli i katërt ka të bëjë me pjesën aplikative duke përdorur metodat numerike për përafrimine zgjidhjeve. Përafrimi i zgjidhjeve do të përbëjë edhe pjesën kryesore në temën e disertacionit për këtë kapitull. Gjithashtu do të jepen një seri përafrimesh të zgjidhjeve të marra nga përdorimi i algoritmit përkatës. Sigurisht do të paraqiten llogaritjet dhe rezultatet e nxjerra nga përdorimi i software-it përkatës dhe krahasimi me rezultatet e marra nga përdorimi i metodës numerike të përafrimit. Është gati e pamundur të kryesh të gjitha njehsimet pa ndihmën e një software-i. Janë përdorur software-t “Matematika” dhe “Matlab” për zgjidhjet numerike dhe vizualizim. Janë paraqitur shembuj numerikë dhe grafikë dhe rezultatet janë krahasuar me zgjidhjet analitike të njohura. Në fund jepen përfundimet e punës, disa rekomandime për punën e ardhshme si dhe referencat.

KAPITULLI I

VALËT UJORE, EKUACIONET E VALËVE UJORE DHE HAPËSIRAT E RENDEVE TË LARTA

1.1. Njohuri mbi valët ujore dhe llojet e tyre

Vala e ujit: Një valë sipërfaqësore thuhet të jetë në ujë të cekët nëse gjatësia e valës së saj është shumë më e madhe se thellësia e ujit lokal.

Valët e ujit të cekët: Valët e ujit të cekët korrespondojnë me rrjedhën në sipërfaqe të lirë të një vale uji nën forcën e gravitetit, ose me rrjedhën poshtë një sipërfaqeje presioni horizontal në rrjedhat ujore.

Ekuacionet e valës së cekët të ujit: Ekuacionet e valës së ujit të cekët janë një grup ekuacionesh diferenciale me derivate të pjesshme që përshkruajnë valët e ujit të cekët.

Uji i thellë: Një valë sipërfaqeje thuhet të jetë në ujë të thellë nëse gjatësia e valës është shumë me shkurtër se thellësia e ujit.

Valë e ngurtësuar soliton: Një valë e vetmuar është një valë graviteti e lokalizuar që ruan koherencën e saj dhe vizibilitetin e saj nëpërmjet vetive të hidrodinamikës jolineare. Valët e vetmuara kanë amplitudë të fundme dhe përhapen me shpejtësi konstante dhe formë konstante.

Soliton: Solitonet janë zgjidhjet për problemin e valëvetë vetmuara që kanë një veti të shpërndarjes elastike: ato ruajnë formën dhe shpejtësinë e tyre pas përplasjes me njëra-tjetrën.

Vala e brendshme: Valët e brendshme varen nga densiteti, stratifikimi i lëngut. Një valë e brendshme lëviz në brendësi të një lëngu. Shpejtësia maksimale dhe amplituda maksimale ndodhin brenda rrjedhës ujore ose në një kufi të brendshëm ujqor.

Vala sipërfaqe: Një valë sipërfaqe udhëton në sipërfaqen e lirë të një lëngu. Shpejtësia maksimale e valës dhe zhvendosja maksimale e grimcave të lëngjeve ndodhin në sipërfaqen e lirë të lëngut.

Cunami: Një cunam është valë e gjatë oqeani e shkaktuar nga një tërmet nënujqor, një shpërthim vullkanik nënujqor ose nga një rrëshqitje toke.

Shpërbërja e valës: Shpërbërja e valës në valë uji i referohet vetisë që valët më të gjata kanë frekuenca më të ulta dhe udhëtojnë më shpejt.

Valët e ujit më të njohura janë valët në plazh të shkaktuara nga era ose baticat, valë të krijuara nga hedhja e një guri në një pellg, nga kalimi i një anijejeose nga pikat e shiut mbi lumë (fig. 1).

Pavarësisht njohjes së tyre, këto janë të gjitha llojet e ndryshme të valëve të ujit. Ne do të trajtojmë valët e ujit ku thellësia e valës është shumë më e madhe se gjatësia e valës së turbulencës së sipërfaqes së lirë dhe valët e cekëta të ujit, ku thellësia e valës është shumë më vogël se gjatësia e valës së turbulencës së sipërfaqes së lirë. Gjithashtu, diskutimi është fokusuar në valët e gravitetit në të cilat vepron si force rivendosëse. Në disa artikuj mbi valët i kushtohet vëmendje efekteve për të cilat forca rivendosëse primare është tensioni sipërfaqësor. Historia e valëve të cekëta të ujit (shih [3],[5]) shkon pas tek matematikanët francezë dhe britanikë të shekullit të tetëmbëdhjetë dhe fillimet e shekullit të nëntëmbëdhjetë, ku është konsideruar një nga pionierët e hidrodinamikës (shih [4]). Matematikanët francezë me kujdes nxorën ekuacionet për lëvizjen e lëngut të paqëndrueshëm dhe joviskoz, subjekt i një force gravitacionale vertikale konstante, ku lëngu është kufizuar poshtë nga një fund i papërshkueshëm dhe sipër nga një sipërfaqe e lirë. Duke nisur nga këto ekuacione themelore dhe duke bërë supozime të mëtijshme thjeshtuese, mund të nxirren modele të ndryshme të valëve të cekëta të ujit. Këto modele të valëve të ujit janë gjerësisht të përdorshme në oqeanografinë dhe shkencat atmosferike.

Ne do të trajtojmë valët ujore të cekëta, konkretisht valët ujore afër bregdetit të plazheve. Këto valë kanë cilësinë që janë valë me amplitudë relativisht të vogël.



Fig 1. Valët ujore të cekëta në plazh

Vëzhgimi fillestar i një vale të vetmuar në ujë të cekët është bërë nga John Scott Russell, treguar në Figurën 2. Russell ishte një inxhinier skocez dhe arkitekt naval i cili kreu eksperimente për Kompaninë Union Canal, me qëllim dizenjimin e një varke më efikase për të lundruar në ujrat e cekëta të kanalit.

Në vitin 1895, profesori gjerman Diederik Korteweg dhe student i tij doktorant Gustav de Vries paraqitën një ekuacion diferencial me derivate të pjesshme (PDE) i cili modelon valën e vetmuar që kishte vëzhguar Russell. Që prej 1970, ekuacioni KdV dhe ekuacione të tjera që pranojnë valën e ngurtësuar dhe zgjidhjet kanë qenë subjekt i studimit të vazhduar dhe shumë intensiv të

Filippov (shih [6]). Sqarojmë se modelet plotësisht të integrueshme janë sistemet infinit-dimensional, bi-Hamiltoniane, me ligje të ruajtjes së pafundme dhe simetri të rendit të lartë që pranojnë zgjidhje soliton të çdo rendi.

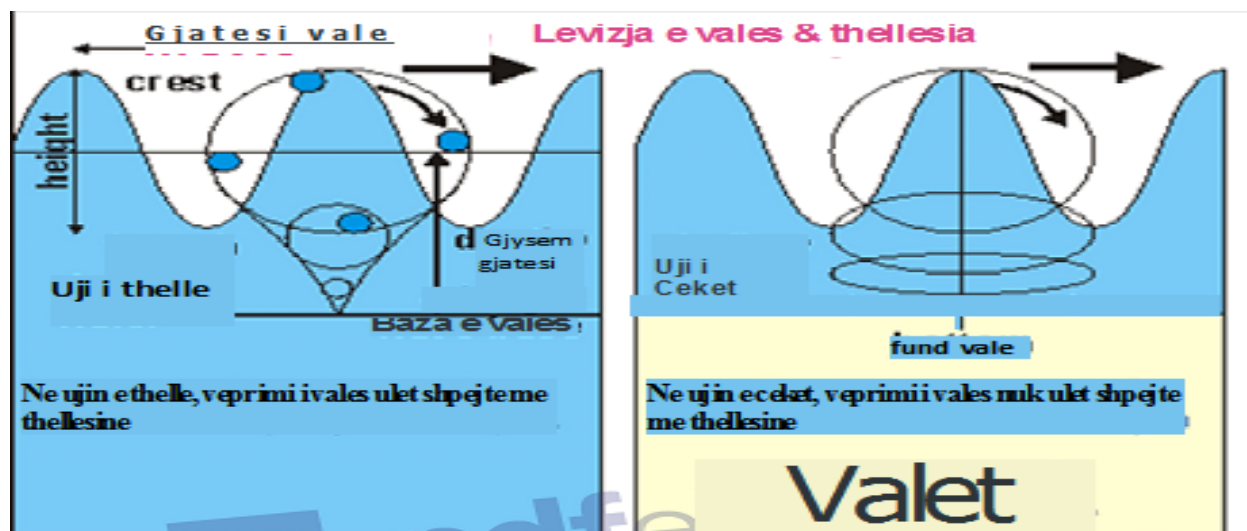


Fig 2. Dallgë uji dhe valë e ujit të cekët

1.2 Ekuacionet e valës ujore

Kërkimi kryesor i temës së disertacionit është studimi lidhur me ekuacionet e valës së ujit dhe aplikimet e tij. Në veçanti marrim në konsideratë dhe studiojmë ekuacionin e valës së ujit të cekët dhe aplikimet e tij. Ekuacionet e valës së ujit cekët formojnë një sistem jo linear. Pjesa më e madhe e rrjedhave të ujit të cekët me interes praktik është trajtimi në sistemin dydimensional. Rrjedhat që studiohen në sistemin dydimensional bazohen fuqimisht në teknikat numerike të përdorura për modelimin e rrjedhave njëdimensionale, përveç kësaj, përfaqësimi më i thjeshtë është ai i modeleve njëdimensionale. Në veçanti, një formulim stabil është ai i përdorimit të modelit të ujit të cekët dydimensional.

Ekuacioni Korteweg-deVries (KdV), është ekuacioni diferencial jo linear më i thjeshtë:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

ku $u = u(x, t)$ është një funksion me dy variabla. Ekuacioni KdV është i rëndësishëm pasi ai sqaron detaje në shumë kontekste fizike. Ai mund të përdoret për të përshkruar valët në ujë të cekët, rrjetat jolienare joharmonike, dinamika e gazit dhe valët hidro-magnetike. Ekuacioni i modifikuar KdV do të luaj një rol të rëndësishëm në atë që vijon,

$$v_t + 6v^2v_x + v_{xxx} = 0 \quad (1.2)$$

Në veçanti riformulojmë ekuacionin Camassa–Holm duke përdorur një sërë variablash të ndryshëm dhe duke përfutur një sistem gjysmëlinear të ekuacioneve diferenciale,

$$u_t - u_{xxt} + 2ku_x + 3uu_{xx} - uu_{xxx} = 0, \quad u|_{t=0} = \bar{u} \quad (1.3)$$

ekuacion, i cili ka marrë një vëmendje të konsiderueshme dekadën e fundit. Nëse konsiderojmë rastin $k = 0$, ekuacioni është

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x - 2u_xu_{xx} - uu_{xxx} = 0 \quad (1.4)$$

Ekuacioni Camassa-Holm gëzon shumë veti të rëndësishme matematikore. Ai është bi-Hamiltonian, që do të thotë se ka dy Hamiltonianë të dallueshëm por të pajtueshëm.

Ekuacionet e ujit të cekët modelojnë përhapjen e turbullimit në ujë dhe lëngje të tjera. Ekuacionet rrjedhin nga parimet e ruajtjes së masës dhe të momentit.

Variablat e pavarur janë koha t dhe dy koordinatat e hapësirës, x dhe y . Variablat e varur janë lartësia ose thellësia e ujit, h , dhe fusha dydimensionale e shpejtësisë së valës, u dhe v . Me zgjedhjen e duhur të njësive, sasitë e ruajtura janë masa, e cila është në përpjestim të drejtë me h dhe momenti, i cili është në përpjestim të drejtë me uh dhe vh .

Forca që vepron mbi ujë është graviteti, përfaqësuar nga konstantja gravitacionale g . Ekuacionet diferenciale janë:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

Pjesa më e madhe e rrjedhave të ujit të cekët me interes praktik janë dydimensionale. Shumica e metodave kompjuterike për simulimin e rrjedhave dydimensionale janë të bazuara fuqimisht në teknikat numerike të përdorura për modelimin e rrjedhave njëdimensionale.

Duke filluar nga ekuacionet kryesore të Stokes për valët e ujit, PDE-të plotësisht të integrueshme arrijnë në nivele të ndryshme të përafrimit në teorinë e valës së ujit të cekët. Katër shkallët gjatësore luajnë një rol të rëndësishëm në derivimin e tyre. Siç tregohet në Fig.3, gjatësia λ e valës mat distancën midis dy kulmeve të njëpasnjëshme.

Amplituda a mat lartësinë e valës, e cila është distancë e ndryshueshme midis ujit të paturbulluar dhe kulmit të valës. Thellësia e ujit h është matur nga fundi (rrafshi) i ujit deri te sipërfaqja e lirë dhe e qetë. Shkalla gjatësore e katërt është përgjatë aksit Y , i cili është përgjatë kreshtës së valës dhe pingul me planin (X, Z) .

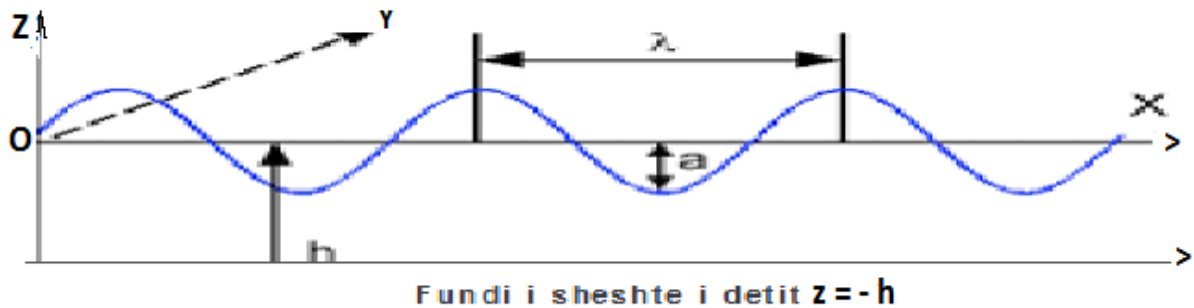


Fig. 3 Koordinatat dhe vala periodike në sipërfaqen e ujit

Përshkruajmë:

(i) valët e gjata (ose valët e cekëta) d.m.th $h \ll \lambda$; (ii) me amplitudë relativisht të vogël d.m.th $a \ll h$; (iii) udhëtuese në një drejtim (përgjatë aksit X) ose dobësisht dydimensionale (me një komponent të vogël në drejtimin Y). Për më tepër, efektet e vogla duhet të jenë të krahasueshme në madhësi.

- Ekuacioni Korteweg-de Vries

Ekuacioni KdV u trajtua fillimisht për të përshkruar valët e ujit të cekët me gjatësi vale të gjatë dhe amplitudë të vogël. Në nxjerrjen e ekuacionit, Korteweg dhe deVries supozuan që të gjitha lëvizjet janë uniforme në drejtimin Y , përgjatë kreshtës së valës. Në këtë rast, lartësia sipërfaqësore (mbi nivelin e ekuilibrit h të valës, duke u përhapur në drejtimin X , është një funksion vetëm për pozicion horizontal X (përgjatë kanalit) dhe për kohën T ; d.m.th., $Z = \eta(X, T)$.

Ekuacioni Korteweg-deVries (KdV) është ekuacioni diferencial me derivate të pjesshme jolinear me i thjeshte:

$$u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.5)$$

ku $u = u(x, t)$ është një funksion me dy variabla dhe nënshënimet tregojnë derivatet e pjesshme. Parametri α mund të shkallëzohet i përfaqësuar nga çdo numër real. Vlerat më të përdorshme zakonisht janë $\alpha = \pm 1$ ose $\alpha = \pm 6$. Termi u_t paraqet evolucionin e kohës të përhapjes së valës në një drejtim. Termi jolinear $\alpha u u_x$ llogarit rrëzimin e valës dhe termi jo linear i shpërndarjes u_{xxx} përshkruan përhapjen e valës.

- Ekuacioni Camassa-Holm

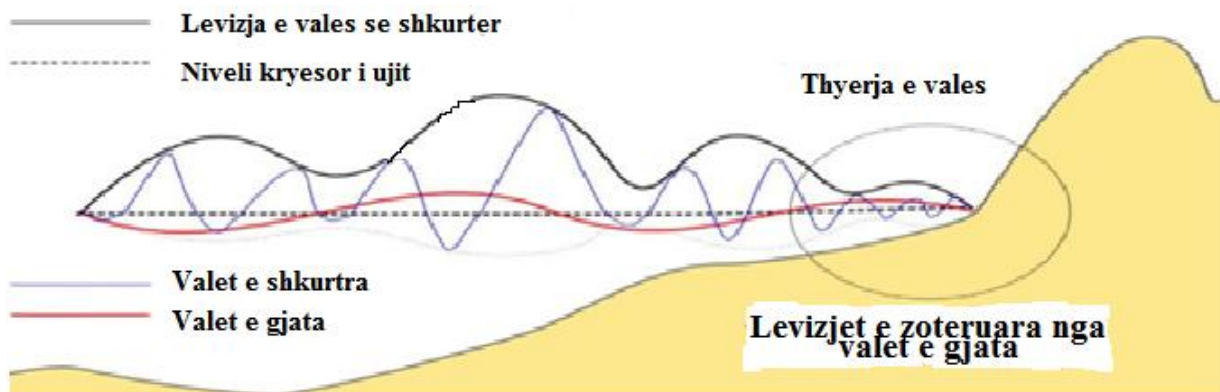
Ekuacioni CH , është quajtur ekuacioni Camassa-Holm pasi matematikanët Camassa dhe Holm 1993, 1994 (shih [2]), gjithashtu modeluan valët në ujë të cekët,

$$u_t - \alpha u_{xxt} + 2ku_x + 3uu_{xx} - \alpha uu_{xxx} = 0 \quad (1.6)$$

ku u është shpejtësia e lëngut në drejtimin x ose, në mënyrë ekuivalente , lartësia e sipërfaqes së lirë të ujit mbi një fund të sheshtë dhe k dhe α janë konstante. Ekuacioni C-H pranon zgjidhjet e valës së vetmuar ose më mirë të thuhet valës soliton, por në kontrast me zgjidhjet e ekuacioneve KdV ato janë të nënkuptuara në natyrë. Zgjidhja është quajtur zgjidhje kulmore mbasi përcakton pikërisht zgjidhjen për valën në momentin e pikut (kulmi i lartësisë) që arrin vala e dallgës së ujit, meqenëse ajo kulmon në një kulm (ose kënd) ku derivatet e para janë jo të vazhdueshme.

- Ekuacionet e valës së ujit të cekët në dinamikën e lëngjeve

Ekuacionet e valës së ujit të cekët të përdorura në dinamikën e lëngjeve në gjeofizikë janë bazuar në supozimin $D = L \ll 1$; ku D dhe L janë vlerat karakteristike për shkallët e gjatësisë vertikale dhe horizontale të lëvizjes. Për shembull, D mund të jetë thellësia mesatare e një shtrese të ujit (ose i gjithë thellësisë së ujit) dhe L mund të jetë gjatësia e valës së ujit



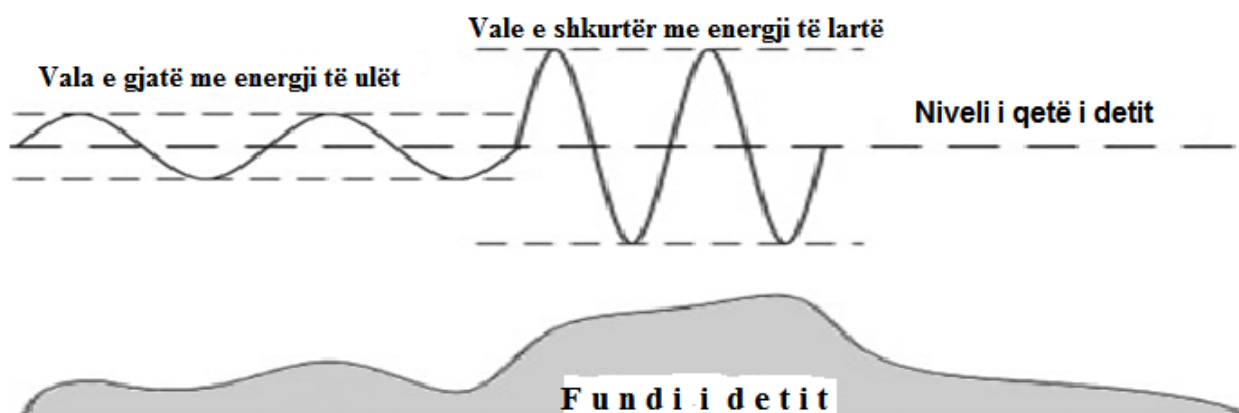


Figure 4: Konfigurimi për modelin gjeofizik të valës së ujit

Komuniteti gjeofizik i dinamikës së lëngjeve përdor ekuacionet e mëposhtme të ujit të cekët 2D ,

$$u_t + uu_x + vv_y + gh_x - 2\Omega v = -gb_x \quad (1.7)$$

$$v_t + vv_x + vv_y + gh_y + 2\Omega u = -gb_y \quad (1.8)$$

$$h_t + (hu)_x + (hv)_y = 0 \quad (1.9)$$

për të përshkruar rrjedhat ujore me një sipërfaqe të lirë nën ndikimin e gravitetit (me nxitim gravitacional g) dhe forcës për shkak të rrotullimit të tokës (me shpejtësi këndore Ω) Si zakonisht, $\mathbf{u} = (u, v)$ përcakton shpejtësinë horizontale të ujit dhe $h(x, y, t)$ është thellësia e tij.

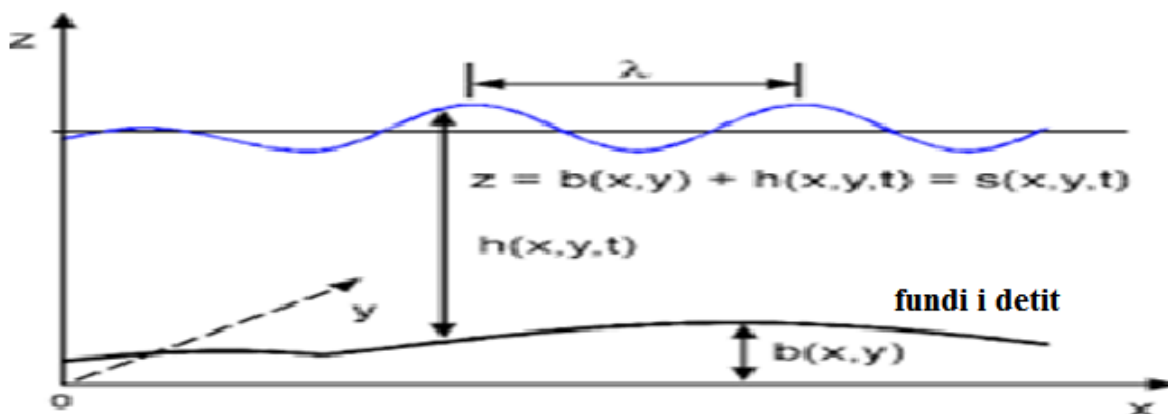


Figure 5: Konfigurimi për modelin gjeofizik të valës së ujit të cekët

Siç tregohet në Figurën 5, $h(x, y, t)$ është distanca midis sipërfaqes së lirë $z = s(x, y, t)$ dhe fundit të ndryshueshëm $b(x, y)$. Pra, $s(x, y, t) = b(x, y) + h(x, y, t)$. Ekuacionet (1.7) – (1.8) shprehin balancën e momentit horizontal, (1.9) shpreh ruajtjen e masës. Shënojmë që komponenti vertikal i shpejtësisë së lëngut është limituar nga dinamika dhe që numri i variablave të pavarur është reduktuar me një. Me të vërtete, z nuk shfaqet në mënyrë të dukshme në (1.7) – (1.8), ku u, v dhe h varen vetëm nga x, y dhe t .

1.3 Eksperimente të valës së ujit dhe vëzhgime

Nëpërmjet një serie eksperimentesh në një ambient hidrodinamik, Hammack shqyrtoi vlefshmërinë e ekuacionit të valës së ujit (shih [10]) dhe ekuacionin KdV si modele për valët e gjata në ujë të cekët (Hammack dhe Segur (shih [8]) si edhe valët e ndryshme me gjatësi shumë më të madhe sesa thellësia e ujit. Kërkimet e tyre ngrinin pyetjen: A mundet një zhvendosje fillestare e ujit, ndërkohë që përhapet me shpejtësi përpara, përfundimisht të evoluojë në një zinxhir të valëve të vetmuara, të lokalizuara (solitonet) dhe një fund oscilator (lëkundës) siç parashikohet nga ekuacioni KdV?

Bazuar në të dhënat eksperimentale, ata arritën në përfundimin që (i) dinamika KdV ndodh vetëm nëse valët udhëtojnë në një distancë të gjatë, (ii) një sasi e konsiderueshme uji duhet të zhvendoset fillimisht (p.sh nga një piston) për të prodhuar një soliton (valë të ngurtësuar), (iii) volumi i ujit i valës fillestare përcakton formën e valës drejtuese në zinxhirin e formuar të valëve, dhe (iv) drejtimi fillestar i zhvendosjes (p.sh lëvizja lart ose poshtë e pistonit) përcakton çfarë do të ndodhë më vonë.

Kërkues të tjerë të ndryshëm kanë testuar vlefshmërinë e ekuacionit KdV dhe variantet në eksperimentet laboratorike. Studimet e matematikanëve në këtë fushë përfshijnë (i) një skemë numerike me vlerësime të gabimit, (ii) një test konvergjence të kodit të kompjuterit, (iii) një krahasim midis parashikimeve të modelit teorik dhe rezultateve të eksperimenteve laboratorike.

Eksperimentet e rezervuarit të ujit në lidhje me analizën e të dhënave aktuale, u dhanë mundësi kërkuesve të gjykonin nëse mund të përdoret apo jo ekuacioni i KdV për të modeluar dinamikën e cunamit (Segur [10]). Kërkimet për cunamin u intensifikuan pas cunamit të Dhjetorit 2004 që shkatërroi rajone të mëdha bregdetare të Indisë, Indonezisë, Sri Lankës dhe Tailandës dhe vrau rreth 300,000 njerëz.

Përveç valëve të ujit të cekët afër plazheve, ekuacioni KdV dhe zgjidhja e tij e valës së vetmuar gjithashtu aplikohen në valët e brendshme në oqean. Valët e brendshme të vetmuara në oqean të hapur janë valë të ngadalta me amplitudë të madhe që udhëtojnë në ndërfaqen e shtresave me dendësi të ndryshme. Valë të tilla janë studiuar që prej 1960. Valë të brendshme të fuqishme mund të ndikojnë në jetën biologjike dhe të ndërhyjnë në lundrimin nënujor. Kuptimi i sjelljes së

valëve të brendshme mund të ndihmojë në krijimin e lehtësirave të prodhimit në det të hapur për naftë dhe gaz natyror.

Rryma afër sipërfaqes shoqëruar me valë të brendshme modulon në mënyrë lokale lartësinë e sipërfaqes së ujit. Kështu, vala e brendshme lë një “firmë” ose “gjurmë” në sipërfaqen e detit në formën e një pakete të valëve të vetmuara (disa herë të quajtura rryma aktuale ose rrymat e baticës). Këto manifestime vizuale shfaqen si vija lineare të gjata në imazhet satelitore ose në fotografitë e marra gjatë fluturimeve hapësinore.

Modeli KdV është i aplikueshëm për lëngjet me dy shtresa dhe valët e brendshme të vetmuara nëse (i) raporti i amplitudës a me thellësinë h të shtresës së sipërme është i vogël, dhe (ii) gjatësia e valës λ është e madhe në krahasim me thellësinë e shtresës së sipërme. Më saktësisht, $\frac{a}{h} = O(2\frac{h^2}{\lambda^2}) \ll 1$. Një diskutim i detajuar i valëve të brendshme të vetmuara dhe referencat përkatëse mund të gjendet në Garrett (shih [7]), Grimshaw (shih [8]), Apel (shih [1]).

1.4 Hapësirat me dimensione të rendit të lartë

- Hapësira funksionale e $C^m(\Omega)$

Përkufizim: Hapësira funksionale është një bashkësi funksionesh ku janë përcaktuar disa veprime.

Shembull: $C(\Omega) = C^m(\Omega) = \{u(x), u(x) \text{ është i vazhdueshëm në } \Omega\}$ (1.10)

është një hapësirë lineare që përmban të gjitha funksionet e vazhdueshme në Ω . Ajo është një hapësirë lineare sepse për çdo numer real α dhe β , kemi: nëse $u_1 \in C(\Omega), u_2 \in C(\Omega)$, atëherë $\alpha u_1 + \beta u_2 \in C(\Omega)$.

Shënojmë, Ω është një bashkësi ku përcaktohen funksionet, për shembull $\Omega = [0, 1]$.

Hapësira funksionale me derivatet e vazhdueshme të rendit të parë është përcaktuar si:

$$C^1(\Omega) = \{u(x), u(x), u'(x) \text{ janë të vazhdueshëm në } \Omega\} \quad (1.11)$$

Dhe në mënyrë të gjashme

$$C^m(\Omega) = \{u(x), u(x), u'(x), \dots, u^{(m)} \text{ janë të vazhdueshëm në } \Omega\} \quad (1.12)$$

Në mënyrë të qartë kemi

$$C^0 \supset C^1 \supset \dots \supset C^m \supset \dots \quad (1.13)$$

Le të jetë m që shkon në infinit, përcaktojmë:

$$C^\infty(\Omega) = \{u(x), u(x) \text{ është e diferencueshme pafundësisht në } \Omega\} \quad (1.14)$$

Për shembull, e^m , $\sin x$ dhe funksionet elementare janë në C^∞ .

- Hapësirat me dimensione të rendit të lartë

Konsiderojmë funksionet shumëdimensionale $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ose $u(x)$, $x \in R^n$. Përdorim shënimet me shumë indekse për të thjeshtësuar shprehjet e derivative të pjesshme.

Le të jetë $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, $\alpha_i \geq 0$ një vektor i plotë në R^n . Për shembull, nëse $n = 5$, $\alpha = (1, 2, 0, 0, 2)$ është një prej α '-ve.

Shënimi me shumë indekse përdoret për të shprehur derivatat e pjesshme të mëposhtme,

$$D^{|\alpha|}u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha_i \geq 0. \quad (1.15)$$

Shembull 1: Kur $n = 2$ dhe $u(x) = u(x_1, x_2)$, të gjitha $D^{|\alpha|}u$ e mundëshme janë

$$\alpha = (2, 0), \quad D^{|\alpha|}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},$$

$$\alpha = (1, 1), \quad D^{|\alpha|}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$\alpha = (0, 2), \quad D^{|\alpha|}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Hapësira C^m mund të percaktohet si

$$C^m(\Omega) = \{u(x_1, x_2, \dots, x_n), D^{|\alpha|}u \text{ janë të vazhdueshëm në } \Omega, |\alpha| \leq m\} \quad (1.16)$$

Kjo do të thotë që të gjithë derivatat e mundëshme deri në rendin m janë të vazhdueshëm në Ω .

Shembull 2: Kur $n = 2, m = 3$, atëherë të gjitha $u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xyy}, u_{yyy}$ duhet të jenë të vazhdueshëm në Ω nëse $u \in C^3(\Omega)$. Shënojmë që $C^m(\Omega)$ ka dimensione të pafundme.

Përkufizim. Distanca në $C^0(\Omega)$ është percaktuar si

$$d(u, v) = \max_{x \in \Omega} |u(x) - v(x)| \quad (1.17)$$

Përkufizim. Një hapësirë lineare me distancë të percaktuar quhet hapësirë metrike. Një distancë e një funksioni jo negativ u dhe v që përmbush;

$$d(u, v) \geq 0, \quad d(u, v) = 0 \quad \text{nëse } u \equiv v \quad (1.18)$$

$$d(u, v + w) \leq d(u, v) + d(u, w) \quad (\text{mosbarazimi i trekëndëshit}) \quad (1.19)$$

Përkufizim. Norma në $C^0(\Omega)$ është një funksion jo negativ i u i përcaktuar nga

$$\|u(x)\| = d(u, \theta) = \max_{m \in \Omega} |u(x)| \quad (1.20)$$

ku θ është elementi zero . Një normë duhet të përmbushë

$$\|u(x)\| \geq 0, \quad \|u(x)\| = 0 \quad \text{nëse } u \equiv v \quad (1.21)$$

$$\|\alpha u(x)\| = \|\alpha\| \|u(x)\|, \quad \alpha \text{ është një numër} \quad (1.22)$$

$$\|u(x) + v(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\| \quad (\text{mosbarazimi i trekëndëshit}) \quad (1.23)$$

Përkufizim. Një hapësirë lineare me një normë quhet *hapësirë e normuar*. Në $C^m(\Omega)$, distanca dhe norma përcaktohen si

$$d(u, v) = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \max_{z \in \Omega} |D^{|\alpha|}u(x) - D^{|\alpha|}v(x)| \quad (1.24)$$

$$\|\alpha u(x)\| = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \max_{z \in \Omega} |D^{|\alpha|}u(x)| \quad (1.25)$$

1.5 Hapësirat Sobolev $H^m(\Omega)$

Kujtojmë hapësirat $C^m(\Omega)$. Për analogji përcaktojmë hapësirat integrale $H^m(\Omega)$.

Përkufizim. Hapësira integrale $H^m(\Omega)$ quhet, $C^0 \rightarrow L^2 = H^0$, $C^m \rightarrow L^m$

Hapësira integrale $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ përcaktohet si

$$L^2(\Omega) = \left\{ u(x) \int_{\Omega} u^2(x) dx < \infty \right\} \quad (1.26)$$

që korespondon me hapësirën $C^0(\Omega)$. Shohim që $C(0,1) = C^0(0,1) \subset L^2(0,1)$

Lema: $L^2(\Omega)$ është një hapësirë e plotë. Kjo do të thotë që çdo varg Koshi (Cauchy) $\{f_n\}$ bën pjesë në L^2 . Me fjalë të tjera, egziston një $f \in L^2(\Omega)$ i tillë që

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^2} = 0 \quad \text{or} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad (1.27)$$

Përkufizim. Një varg Koshi është një varg që përmbush vetinë: për çdo numër të dhënë pozitiv ε , egziston një numër i plotë N , i tillë që $\|f_n - f\|_{L^2} < \varepsilon$, nëse $m \geq N$, $n \geq N$.

Përkufizim. Një hapësirë e normuar e plotë quhet *hapësirë Banach* (një varg Koshi konvergjon në termat e normës). Për këtë arsye $L^2(\Omega)$ është një hapësirë Banach .

- **Prodhiimi skalar në L^2**

Përkufizim .Në R^n , për çdo dy vektorë të dhënë, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \in R^n, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} \in R^n$,

prodhiimi skalar përcaktohet si

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1.28)$$

Përkufizim .Në mënyrë të ngjashme, *prodhiimi skalar* në hapësirën L^2 përcaktohet si

$$\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)d(x) / f(x) \in L^2(\Omega), g(x) \in L^2(\Omega) \quad (1.29)$$

që përmbush kërkesat si një *prodhim skalar*,

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$$

$$\langle \alpha f, g \rangle = \langle f, \alpha g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle, \text{ për të gjitha } \alpha \in R$$

$$\langle f, g + w \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, w \rangle, \text{ për çdo } f(x) \in L^2(\Omega) \text{ } g(x) \in L^2(\Omega)$$

Me prodhimin skalar, *forma e dobët* për problemin e modelit të thjeshtë

$$u' = f, \quad 0 < x < 1 \quad u(0) = u(1) = 0$$

mund të rishkruhet si $(u', v') = (f, v)$ për të gjitha $v \in H^1(0,1)$

dhe forma e minimizimit është $\min_{v \in H_{0(0,1)}^1} F(v)$,

$$F(v) = \frac{1}{2}(v', v') - (f, v) \quad (1.30)$$

Shënim: Norma, distanca dhe prodhiimi skalar në $L^2(\Omega)$ kanë lidhjen e mëposhtme

$$\|u(x)\| = \sqrt{(u, v)} = D(u, \theta) = \left\{ \int_{\Omega} |u^2| d(x) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

- **Mosbarazimi Koshi-Shvarc (Cauchy – Schwartz) në $L^2(\Omega)$**

Përkufizim. Për hapësirën Hilbert me një normë (u, v) dhe normën e tij rezultante $\|(u, v)\| = \sqrt{(u, v)}$, mosbarazimi Cauchy-Schwartz është si më poshtë,

$$|u(x), v(x)| \leq \|u\| \|v\| \quad (1.31)$$

- **Hapësirat $L^p(\Omega)$**

Përkufizim . Hapësira $L^p(\Omega)$ përcaktohet si

$$L^p(\Omega) = \left\{ u(x) \int_{\Omega} |u|^p(x) dx < \infty \right\} \quad (1.32)$$

Përkufizim. Distanca në $L^p(\Omega)$ përcaktohet si

$$d(f, g) = \left\{ \int_{\Omega} |f - g|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (1.33)$$

Meqënëse një hapësirë e normuar e plotë quhet *hapësirë Banach* (një varg Koshi konvergjon në termat e normës), atëherë $L^p(\Omega)$ është një hapësirë Banach. Por ajo nuk është një hapësirë Hilbert, sepse nuk ka asnjë prodhim skalar.

- **Hapësirat Sobolev të lidhura me derivatet në format integrale**

Në mënyrë të ngjashme me $C^m(\Omega)$, ne përdorim $H^m(\Omega)$ për të përcaktuar hapësirat funksion me derivate në forma integrale. Hapësirat funksion janë pjesë e hapësirave Sobolev.

Atëherë ne përcaktojmë:

$$H^0(\Omega) = L^2(\Omega) = \left\{ v(x), \int_{\Omega} |v|^2 dx < \infty \right\} \quad (1.34)$$

- **Përkufizimi i derivateve të dobëta**

Dimë që nëse $u(x) \in C^1(0, 1)$, atëherë për çdo funksion $\phi \in C^1(0, 1)$, $\phi(0) = \phi(1) = 0$, kemi:

$$\int_0^1 u'(x) \phi(x) dx = u \phi \Big|_0^1 - \int_0^1 u(x) \phi'(x) dx = - \int_0^1 u(x) \phi'(x) dx \quad (1.35)$$

Një $\phi(x)$ i tillë është quajtuar një funksion testimi në $C_0^1(0, 1)$.

Prandaj mund të përcaktojmë derivatin e dobët të $u(x) \in L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$ si një funksion $v(x)$ që kënaq

$$\int_{\Omega} v(x) \phi(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \phi'(x) dx \quad (1.36)$$

për të gjitha $\phi(x) \in C_0^1(\Omega)$, $\phi(0) = \phi(1) = 0$.

Nëse ekziston një funksion i tillë, ai është quajtur derivat i dobët i rendit të parë i $u(x)$ dhe është përcaktuar si $v(x) = u'(x)$.

Në mënyrë të ngjashme, mund të përkufizojmë derivatine rendit të m -të të $u(x) \in H^m(\Omega)$ si një funksion $v(x)$ që kënaq

$$\int_{\Omega} v(x)\phi(x)dx = (-1)^m \int_{\Omega} u(x)\phi^m(x)dx \quad (1.37)$$

për të gjitha $\phi(x) \in C_0^m(\Omega)$. Kjo është

$$\phi(x) \in C^m(\Omega), \quad \phi(x) = \phi' = \dots = \phi^{(m-1)}(x) = 0, \quad \text{nëse } x \in \partial\Omega.$$

Nëse një funksion i tillë $v(x)$ ekziston, ai quhet derivat i rendit të m -të të $u(x)$ dhe përcaktohet si $v(x) = u^{(m)}(x)$. Derivatet e rendit të lartë janë përcaktuar nga derivatet e rendeve më të ulta.

- Përkufizimi i hapësirave Sobolev $H^m(\Omega)$

Pasi kemi përcaktuar derivatet e para të pjesshme, përcaktojmë hapësirat Sobolev $H^1(\Omega)$ si

$$H^1(\Omega) = \{v(x), \quad D^{|\alpha|}v \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| \leq 1\} \quad (1.38)$$

Për shembull, $H^1(a, b)$ është përcaktuar si

$$H^1(a, b) = \left\{ v(x), \quad a < x < b, \int_a^b v^2 dx < \infty; \quad \int_a^b v'^2 dx < \infty \right\}$$

Në dy dimensionet e hapësirës, $H^1(\Omega)$ është përcaktuar si

$$H^1(\Omega) = \left\{ c(x, y), \quad v \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (1.39)$$

Në mënyrë të ngjashme, hapësira Sobolev $H^m(\Omega)$ është përcaktuar si

$$H^m(\Omega) = \{v(x), \quad D^{|\alpha|}v \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| \leq m\} \quad (1.40)$$

- Prodhimi skalar në hapësirat H^m

Prodhimi skalar në $H^0(\Omega)$ është i njëjtë si ai në $L^2(\Omega)$

$$(u, v)_{H^0(\Omega)} = (u, v)_0 = \int_{\Omega} uv dx \quad (1.41)$$

Prodhimi skalar në $H^1(a, b)$ përcaktohet si

$$(u, v)_{H^1(a, b)} = (u, v)_1 = \int_a^b (uv + u'v') dx \quad (1.42)$$

Prodhimi skalar në $H^1(\Omega)$ i dy variablave është përcaktuar si

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_1 = \iint_{\Omega} \left(uv + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \quad (1.43)$$

Prodhimi skalar në $H^m(\Omega)$ i dimensioneve të përgjithshme është

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = (u, v)_m = \iint_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (D^{\alpha} u(x)) (D^{\alpha} v(x)) dx \quad (1.44)$$

Norma në $H^m(\Omega)$ e dimensioneve të përgjithshme është

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \|u\|_m = \left\{ \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |D^{\alpha} u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}, \quad (1.45)$$

prandaj $H^m(\Omega)$ është një hapësirë Hilbert. Një normë mund të përcaktohet nga prodhimi skalar. Për shembull, në $H^1(a, b)$, norma H^1 përcaktohet nga

$$\|u\|_1 = \left\{ \int_a^b (u^2 + u'^2) dx \right\}^{1/2} \quad (1.46)$$

Distanca në $H^m(\Omega)$ e dimensioneve të përgjithshme përcaktohet si

$$d(u, v)_m = \|u - v\|_m \quad (1.47)$$

- Lidhjet midis $C^m(\Omega)$ dhe $H^m(\Omega)$ – Teorema Sobolev e përfshirjes

Në hapësirën një dimensionale, kemi

$$H^m(\Omega) \subset C^0(\Omega), \quad H^2(\Omega) \subset C^1(\Omega), \quad \dots \dots H^{1+j}(\Omega) \subset C^j(\Omega)$$

Teorema 1.1 Teorema Sobolev e përfshirjes: Nëse $2m > n$, atëherë

$$H^{m+j}(\Omega) \subset C^j(\Omega), \quad j = 0, 1, \dots, \quad (1.48)$$

ku n është dimension i variablave të pavarur të elementëve në hapësirën Sobolev.

Shembull 1

Në hapësirën dy dimensionale kemi $n = 2$. Kushti $2m > n$ do të thotë që $m > 1$. Nga teorema e përfshirjes kemi

$$H^{2+j} \subset C^j, \quad j = 0, \rightarrow H^2 \subset C^0, \quad j = 1, \rightarrow H^3 \subset C^1, \dots$$

Nëse $u(x, y) \in H^2$, e cila do të thotë që u , u_x , u_y , u_{xx} , u_{xy} , dhe të gjitha u_{yy} i përkasin L^2 , ne mund të konkludojmë që $u(x, y)$ është e vazhdueshme, por u_x dhe u_y mund të mos jenë të vazhdueshëm.

Shembull 2

Në hapësirën tre dimensionale, $n = 3$, $2m > n$ do të thotë $m > 3/2$. Kemi të njëjtin rezultat si në 2D (dy dimensional).

$$H^{2+j} \subset C^j, \quad j = 0, \rightarrow H^2 \subset C^0, \quad j = 1, \rightarrow H^3 \subset C^1, \dots$$

Kapitulli II

TEORIA E EKUACIONIT TË VALËS UJORE

2.1 Vështrim i shkurtër mbi ekuacionin e valës ujore

Ekuacioni Korteweg-deVries (ekuacioni KdV), është ndoshta ekuacioni diferencial me derivate të pjesshme jolinear më i thjeshtë që përfaqëson ekuacionin e valës ujore dhe është:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

ku $u=u(x,t)$ është një funksion me dy variabla. Ekuacioni KdV është shumë i rëndësishëm pasi lind në shumë kontekste fizike. Ai mund të përdoret për shembull për të përshkruar valët në ujë të cekët, rrjetat jolineare, dinamikën e gazit dhe hidromagnetika dhe valët jon-akustike në plazmën e ftohtë. Interesi është për derivimet fizike. Shënojmë që koeficientët përpara tre termave janë disi arbitrare.

Ekuacioni i modifikuar KdV. Një ekuacion i ngjashëm që do të luaj një rol të rëndësishëm është ekuacioni i mëposhtëm që njihet si *Ekuacioni i modifikuar KdV*, shkurtimisht ekuacioni MKdV:

$$v_t + 6v^2v_x + v_{xxx} = 0$$

Ekuacioni Camassa-Holm dhe ekuacioni Degasperis-Procesi janë dy ekuacione që kënaqin kushtin e integritetit të plotë.

Ekuacioni Camassa-Holm është si më poshtë:

$$(u - \varepsilon u_{xx})_t + ku_x + 3uu_x = \varepsilon (2u_x u_{xx} + uu_{xxx}) \quad , \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

Në vitin 1993 Camassa dhe Holm nxorrën ekuacionin dhe për $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$ në ekuacionin e mësipërm si një model për përhapjen e valës së ujit njëkahëshe në ujë të cekët me u që përfaqëson lartësinë e sipërfaqes së lirë të ujit nga fundi i sheshtë.

Për $\varepsilon = 0$ marrim ekuacionin e njohur KdV

$$u_t + ku_x + \alpha uu_x + \gamma u_{xxx} = 0$$

Të dyja përshkruajnë valët e ujit të cekët. Për më tepër këto ekuacione kanë një strukturë bi-Hamiltoniane, ato janë plotësisht të integrueshme, ato kanë shumë sasi të ruajtura të palimituara. Nga një këndvështrim matematikor, ekuacioni Camassa Holm është i mirëstuduar (shih 11). Rëndësia e ekuacionit si model për valën e ujërave të cekët është studiuar më tej nga Johnson.

Në [11]-[13], Degasperis dhe Procesi, në fillim studiuuan familjen e mëposhtme të ligjeve PDE të ruajtjes të shpërndarjes së rendit të tretë me kushtet kufitare

$$u_t + c_0 u_x + \gamma u_{xxt} - \alpha^2 u_{xx} = (c_1 u^2 + c_1 u_x^2 + c_3 u_{xx})_x, \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

ku $\alpha, c_0, c_1, c_2, c_3$ janë konstante reale dhe indekset përcaktojnë derivatet e pjesshme. Simboli Ω është një bashkësi ku janë përcaktuar funksionet, për shembull $\Omega = [0, 1]$.

Duke ndjekur metodologjinë e përshkruar (shih [16]) për sistemet e përgjithshme bi-Hamiltoniane, është e mundur të nxirret një numër i pafundëm i sasive të ruajtura për zgjidhjet e ekuacionit Camassa Holm. Problemi konsiston në llogaritjen e fushës së largët të shpërndarë mbi një pengesë “forma” e të cilës përcaktohet në disa mënyra nga u (për t fikse). Në praktikë, kjo do të thotë të gjesh vlerat vetiake të operatorit linear që varen nga $u(t, x)$. Fakt i dukshëm është se, ndërkohë që koha ecën, nëse $u(t, x)$ përmbush këtë ekuacion, atëherë këto vlera vetiake përmbushin ekuacionet diferenciale lineare triviale të cilat mund të zgjidhen në mënyrë eksplícite dhe fusha e largët mund të përcaktohet për çdo kohë.

Kur $c_1 = \frac{\alpha}{2}$ dhe $c_2 = \frac{\varepsilon(\beta-1)}{2}$ dhe $c_3 = \varepsilon$, atëherë duke zëvendësuar c_0 me k dhe α^2 me ε në ekuacionin Camassa Holm, marrim *ekuacionin e përgjithshëm të ujit të cekët* si më poshtë:

$$(u - \varepsilon u_{xx}) + k u_x + \alpha u u_x + \gamma u_{xxx} = \varepsilon (\beta u_x u_{xx} + u u_{xxx}), \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

Ekzistojnë të paktën tre ekuacione të famshme që përmbushin kushtin e integritetit të plotë brenda kësaj familjeje: ekuacioni KdV (shih [14]), ekuacioni Camassa-Holm (shih [15]), dhe ekuacioni Degasperis-Procesi (shih [11]-[13]).

Ekuacionet e valës së ujit të cekët modelojnë përhapjen e turbullimit në ujë dhe lëngje të tjerë. Rrjedhat e ujit të cekët karakterizohen nga zona rrjedhjeje me sipërfaqe të lirë. Ekuacionet e valës së ujit të cekët formojnë një sistem jo linear.

Ekuacionet shpesh pranojnë zgjidhje jo të vazhdueshme dhe zgjidhjet analitike janë të kufizuara në shumë pak raste të idealizuara.

Thellësia e ujit është e vogël në krahasim me gjatësinë e valës së turbulencës. Për shembull, ne normalisht nuk mendojmë se Oqeani Indian është i cekët. Thellësia është dy ose tre kilometra. Por cunami shkatërrues në Oqeanin Indian në 26 dhjetor 2004, përfshiu dallgë që ishin dhjetra ose qindra kilometra të gjata. Kështu përafrimi i ujit të cekët parashikon një model të arsyeshëm në këtë situatë.

Në veçanti, kujtojmë se egzistenca dhe uniciteti për zgjidhjet globale të dobëta janë vërtetuar nga Coclite [19], Constantin dhe Escher [20].

2.2 Problemi i vlerës fillestare në ekuacionin e valës ujore me term logaritmik

Egziston një literaturë e gjerë mbi pyetjen e egzistencës, egzistencës globale të zgjidhjes për ekuacionin e valës me kushte kufitare jolineare, sjellje asimptotike të zgjidhjes për problemin e mëposhtëm të vlerës fillestare të përdorur nga Enzo Vitillaro [21],[22] dhe Ping Zhang, Yuxi Zheng [24]

$$\begin{aligned} u_{tt} + (-\Delta)^m + u + h(u_t) &= f(u), & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x, t) &= 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \text{ dhe } u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{aligned}$$

Puna dhe trajtimi që do të bëhet në temën time të disertacionit për këtë pjesë do të konsistojë në problemin e vlerave fillestare për një klasë të ekuacioneve të valës jolineare të rendit më të lartë me terma logaritmikë në trajtën e mëposhtme (shih [82],[86])

$$\begin{aligned} u_{tt} + P + u + u_t |u|^2 u &= u \ln |u|^k, & (x, t) \in \Omega \times [0, T), \\ u(x, t) &= 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \text{ dhe } u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{aligned}$$

ku $\Omega \subset R^n$, ($n \geq 1$) është një zonë e kufizuar me kufi të butë $\partial\Omega$, $0 < k < 1$, k është një parametër i vogël dhe $P = (-\Delta)^m$, m është një numër natyror ($m \geq 1$). Ne do të merremi edhe me vlerësimin e shuarjes së energjisë.

Hiramatsu [26] gjithashtu paraqiti ekuacionin e mëposhtëm:

$$u_{tt} + P u + u + u_t + |u|^2 u = u \ln |u|^k, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad t > 0$$

ku $P = -\Delta U$ kur studiojmë dinamikën Q në fizikën teorike [26].

Duke ndërtuar një funksion të përshtatshëm Lyapunov, marrim vlerësimin e shuarjes së energjisë për ekuacionin logaritmik të valës së rendit më të lartë. Kështu qëllimi në këtë seksion është të marrim një vlerësim të shuarjes së zgjidhjes së problemit në bashkësi të qëndrueshme për të cilën zgjidhja e problemit sillet në mënyrë eksponenciale. Mjeti kyç në vërtetim është një ide e përdorur kohët e fundit nga Benaissa [29] dhe Gerbi [30]. Kjo metodë është bazuar në ndërtimin e funksionit të përshtatshëm Lyapunov që shpreh një turbullim të vogël të energjisë. Duke përdorur metodën Gorka [23] marrim egzistencën globale të zgjidhjeve të dobëta për të gjitha $u_0 \in H_0^m, u_1 \in L^2$ për problemin e vlerës fillestare dhe kufitare.

2.3 Zgjidhja globale e dobët dhe teorema kryesore

Para se të bëjmë prezantimin e saktë të rezultateve kryesore, do të paraqesim përkufizimin e zgjidhjes së dobët në problemin Koshi (1-2).

Përkufizim 1. Një funksion i vazhdueshëm $u = u(t, x)$ është një zgjidhje globale e dobët për problemin Koshi (1.2) nëse: $u = u(t, x) \in C((0, \infty) \times \Omega) \cap L^\infty(R, H^m(\Omega))$ dhe $\|u\|_{H^m(\Omega)} \leq \|u_0\|_{H^m(\Omega)}, \forall t > 0$ $u(t, x)$ përmbush ekuacionin (1-2) në kuptimin e shpërndarjeve.

Shënim: $\Omega \subset R^n, n \geq 1$, është një zonë e kufizuar me kufirin e butë $\partial\Omega$.

Teorema 2. Supozojmë se $u_0 \in H^m(\Omega)$. Atëherë problemi Koshi (1.2) ka një zgjidhje të dobët të pranueshme $u = u(t, x)$, në kuptimin e Përkufizimit 1, më sipër. Për më tepër, zgjidhja e dobët $u(t, x)$ në problemin Koshi (Cauchy) (1-2) plotëson vetitë e mëposhtme:

- 1) Egziston një konstante pozitive C që varet vetëm nga $\|u_0\|_{H^m(\Omega)}$ e tillë që $\partial_x u(t, x) \leq \frac{1}{t} + C$ për të gjitha $t > 0$
- 2) $P(t, x) \in L^\infty(R^+, H^m(\Omega))$ dhe $\partial_x u(t, x) \in L^p(R^+, H^m(\Omega))$ për çdo $p < 3$ (d.m.th. për çdo $0 < T, < +\infty$, egziston një konstante pozitive $C_1 = C_1(T, M, p)$ e tillë që

$$\int_0^T \int_{|x| \leq 3} |\partial_x u(t, x)|^p dx dt \leq C_1 \text{ për të gjitha } p < 3$$

- 3) Supozojmë se $u(t, x)$ është një nga shenjat, atëherë $u = u(t, x)$ i afrohet zeros ndërkohë që $t \rightarrow \infty$, d.m.th $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t, x)| = 0$, për të gjitha $x \in \Omega$ ($\Omega \subset R^n, n \geq 1$).

Puna do të vazhdojë me disa lema dhe vërtetimin e Teoremës 2

Në këtë paragraf, duke supozuar $\varepsilon = 1$ në Ek. (1.2), ndërtojmë vargun e zgjidhjeve të përafërta $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t, x)$ si zgjidhje të problemit Koshi (2-1), d.m.th.

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon + u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon - \gamma \partial_x u_\varepsilon + \partial_x P_\varepsilon = \mu \partial_x^2 u_\varepsilon \\ P_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} \left(\frac{\alpha-1}{2} u_\varepsilon^2 + \frac{3-\beta}{2} (\partial_x u_\varepsilon)^2 + (k + \gamma) u_\varepsilon \right) (t, y) dy \\ u_\varepsilon(0, x) = u_{\varepsilon_0}(t, x) \end{cases} \quad (2.1),$$

Egzistenca, uniciteti dhe vlerësimi i energjisë bazike në këtë varg të zgjidhjes së përafërt janë dhënë në lemën e mëposhtme :

Kujtojmë edhe një herë ekuacionin (2.2)

$$u_t + c_0 u_x + \gamma u_{xxt} - \alpha^2 u_{xx} = (c_1 u^2 + c_1 u_x^2 + c_3 u_{xx})_x, \quad x \in \Omega, t > 0 \quad (2.2)$$

ku $\alpha, c_0, c_1, c_2, c_3$ janë konstante reale dhe indeksat përcaktojnë derivatat e pjesshme. Shënimi, Ω është një bashkësi ku janë përcaktuar funksionet, për shembull $\Omega = [0, 1]$.

Lema 3: Le të jetë $\varepsilon > 0$ dhe $u_{\varepsilon_0} \in H^k(\Omega)$ për disa $k \geq 2$. Atëherë egziston një zgjidhje e vetme (unike) $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t, x) \in C((0, \infty), H^k(\Omega))$ për problemin Koshi (3.1). Për më tepër, u_ε përmbush

$$\|u_\varepsilon\|_{H^m(\Omega)} \leq \|u_{\varepsilon_0}\|_{H^m(\Omega)} \quad \forall t > 0$$

Lema 4: Le të jetë $u_0 \in H^m(\Omega)$ dhe $u_\varepsilon(t, x)$ zgjidhje për problemin Koshi (2-1). Egziston një konstante pozitive C që varet vetëm nga $\|u_0\|_{H^m(\Omega)}$, e tillë që

$$\partial_t u_\varepsilon(t, x) \leq \frac{1}{t} + C \quad \text{për të gjitha } t > 0, x \in R$$

Lema 5: Le të jetë $m = \frac{2k}{2k+1}$ me l, k numra të plotë pozitiv dhe $l \geq k$. Supozojmë se a, b, T janë konstante të fundme të dhëna në mënyrë arbitrare me $a < b$ dhe $T > 0$. Atëherë egziston një konstante pozitive $C = C(a, b, T, m, \|u_0\|_{H^m(\Omega)})$ e pavarur nga ε , e tillë që

$$\int_0^T \int_a^b |\partial_t u_\varepsilon(t, x)|^{2+m} dx dt \leq C$$

Fillojmë me kompaktësinë e dobët në $L^\infty(R^+, H^m(\Omega))$. Tani jemi gati të marrim kompaktësinë e nevojshme të zgjidhjes së përafërt $u_\varepsilon(t, x)$.

Lema 6: Egziston një nënvarg $\{u_{\varepsilon_j}(t, x), P_{\varepsilon_j}(t, x)\}$ i vargut $\{u_\varepsilon(t, x), P_\varepsilon(t, x)\}$ dhe disa funksione $\{u(t, x), P(t, x)\}$, $u \in L^\infty(R^+, H^m(\Omega))$ dhe $P \in L^\infty(R^+, H^m(\Omega))$, të tillë që $u_{\varepsilon_j} \rightarrow u$ kur $j \rightarrow \infty$ dhe $P_{\varepsilon_j} \rightarrow P$ në $L^q(R^+, H^m(\Omega))$ kur $j \rightarrow \infty$ për të gjitha $1 < q < +\infty$.

Më pas, paraqesim rezultatin më të fortë, *d.m.th* $\partial_t u_\varepsilon(t, x) \rightarrow \partial_t u(t, x)$ në $L^2(R^+, H^m(\Omega))$ ndërkohë që $\varepsilon \rightarrow 0^+$, e cila na garanton që $u(t, x)$ është një zgjidhje globale e dobët e dëshirueshme. Së pari, theksojmë një ndryshim të vogël të rezultatit bazik të teorisë së masave Young (shih [16 – 18]).

Lema 7 : Le të jetë $u_{t,x}(\lambda)$ masa Young e shoqëruar me $\{q_\varepsilon(t, x)\} = \{\partial_x u_\varepsilon(t, x)\}$.

Atëherë për çdo funksion të vazhdueshëm $f = f(\lambda)$ me $f(\lambda) = o(|\lambda|^r)$ dhe $\partial_\lambda f(\lambda) = o(|\lambda|^{r-1})$ kur $|\lambda| \rightarrow \infty$ dhe $r < 2$ dhe për çdo $\psi \in L_c^s(\Omega)$ me $\frac{1}{s} + \frac{r}{2} = 1$ kemi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega f(q_\varepsilon(t, x)) \psi(x) dx = \int_\Omega \overline{f(q)} \psi(x) dx$$

e njëtrajtshme në çdo nënbashkësi kompakte Ω , ku $\overline{f(q)} = \int_{\Omega} f(\lambda) d\eta_{t,x}(\lambda)$

Lema 8 : Le të jetë $u_{t,x}(\lambda)$ masa Young e dhënë në Lema 7. Atëherë

$$u_{t,x}(\lambda) = \delta_{\bar{q}(t,x)}(\lambda) \quad \text{për gati të gjitha } (t, x) \in R_+ \times \Omega$$

Vërtetimi i Teoremës

Me gjithë njohuritë e dhëna, jemi gati për të vërtetuar rezultatet kryesore d.m.th Teorema 2. Le të jetë $(u, P)(t, x)$ limiti i zgjidhjeve të përafruara $(u_\epsilon, P_\epsilon)(t, x)$ kur $\epsilon \rightarrow 0^+$. Dhe nga Lema 3,4 dhe 6 rrjedh që $u \in C([0, \infty) \times R) \cap L^\infty(R^+, H^m(\Omega))$, $P \in L^\infty(R^+, W^{1,\infty}(\Omega))$. Duke marrë $\epsilon \rightarrow 0^+$ në (2.1), lema 6 tregon se $(u, P)(t, x)$ do të jetë një zgjidhje e dobët e pranueshme me kusht që

$$q_\epsilon \equiv \partial_x u_\epsilon \rightarrow q = \partial_x u \quad \text{ne} \quad L^2_{loc}(R_+ \times \Omega) \quad (2.3)$$

kur $\epsilon \rightarrow 0^+$. Megjithatë (2.3) është tashmë një rrjedhim i thjeshtë i Lemës 8 dhe Lemës 7. Egziston një nënvarg i $\{u_\epsilon(t, x)\}$, vetpërcaktuar i tillë që

$$q_\epsilon \equiv \partial_x u_\epsilon \rightarrow q = \partial_x u \quad \text{në} \quad L^{p_1}_{loc}(R_+, L^{p_2}_{loc}(\Omega)) \quad \forall p_1 < \infty, \quad p_2 < 2 \quad (2.4)$$

Kjo së bashku me Lemën 5 përfshin

$$q_\epsilon \equiv \partial_x u_\epsilon \rightarrow q = \partial_x u \quad \text{në} \quad L^p_{loc}(R_+ \times \Omega) \quad \forall p < 3 \quad (2.5)$$

nga një interpolim i thjeshtë, i cili jep menjëherë (2.3). Për më tepër, rrjedh nga (2.5) që

$$\partial_x u \in L^p_{loc}(R_+ \times \Omega) \quad \forall p < 3$$

prandaj integrueshmeria e lartë hapësirë lokale – kohë qëndron.

Hapi i fundit i vërtetimit është të shqyrtojmë sjelljen asimptotike të zgjidhjes $u(t, x)$.

Kujtojmë edhe një herë ekuacionin (2.2)

$$u_t + c_0 u_x + \gamma u_{xxt} - \alpha^2 u_{xx} = (c_1 u^2 + c_1 u_x^2 + c_3 u_{xx})_x, \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

Nga supozimi ynë që $u(t, x)$ është një nga shenjat, do të konsiderojmë vetëm zgjidhjen jonegative. Rasti tjetër është i ngjashëm. Le të jetë $u(t, x) \geq 0$ një zgjidhje e dobët e pranueshme për ekuacionin (2.2) me $\epsilon = 1$. Atëherë për çdo $t \in R_+$, integrojmë ekuacionin (2.2) në $[0, t] \times (-\infty, x]$ për të marrë

$$\int_{-\infty}^x u(t, y) dy + \frac{1}{2} \int_0^t u^2(s, x) ds - \gamma \int_0^t u(s, x) ds + \int_0^t P(s, x) ds = \int_{-\infty}^x u_0(y) dy \quad (2.6)$$

Kemi:

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^1(R)} + \frac{1}{2} \|u(\cdot, x)\|_{L^2(R_+)} - \gamma \|u(\cdot, x)\|_{L^1(R_+)} + \|P(\cdot, x)\|_{L^1(R_+)} \leq \|u_0\|_{L^1(R)} \quad (2.7)$$

Nga ana tjetër, nga vlerësimi standart mbi konvolucionin marrim

$$\|\partial_x P(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C_0 \|u_0\|_{H^1}^2, \text{ e cila tregon që } \partial_x u \in L^\infty(R_+, L^2(\Omega))$$

Pra, egziston një nënbashkësi $N \in R$ me $(N) = 0$ e tillë që $\partial_x u \in L^\infty(R_+)$ për të gjitha $x \in R \setminus N$. Nga kjo dhe (2.7) rrjedh që

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(t, x)| = 0 \quad \text{për } x \in R \setminus N \quad (2.8)$$

Për çdo $x \in N$, egziston një varg $\{x_j\} \in R \setminus N$, i tillë që $x_j \rightarrow x$ kur $j \rightarrow +\infty$. Meqënëse

$$|u(t, x)| \leq |u(t, x_j)| + |u(t, x) - u(t, x_j)| \leq |u(t, x_j)| + C_0 |x - x_j|$$

Konkludojmë që

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(t, x)| = 0 \quad \text{për } x \in N \quad (2.9)$$

Kjo kompletton vërtetimin e Teoremës.

2.4 Ekuacioni i valës së ujit me term logaritmik

Le të jetë $\|\cdot\|_p$ normë në $L^p(\Omega)$. Në veçanti, përcaktojmë $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ normën e zakonshme $L^2(\Omega)$. Gjithashtu shënojmë C një konstante pozitive universale.

Përkufizim: Një zgjidhje e dobët $u(x, t)$ e problemit (1.2) në $\Omega \times [0, T)$, quhet $u \in C([0, T], H_0^m(\Omega))$, $u_t \in C([0, T], L^2(\Omega))$, $u_{tt} \in C([0, T], H^m(\Omega))$, e tillë që $u(x, 0) = u_0(x)$ në H_0^m , $u_t(x, 0) = u_1(x)$ në L^2 .

Theksojmë përsëri se interesohemi për egzistencën globale të zgjidhjes për ekuacionin e valës ujore me kushte kufitare jolineare dhe terma logaritmike, sjellje asimptotike të zgjidhjes për problemin e mëposhtëm të vlerës fillestare të përdorur nga Enzo Vitillaro [21, 22] dhe Ping Zhang, Yuxi Zheng [24]

$$\begin{aligned} u_{tt} + (-\Delta)^m + u + h(u_t) &= f(u), & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x, t) &= 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \text{ dhe } u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{aligned} \quad (2.10)$$

Në këtë paragraf do të trajtojmë problemin e vlerës fillestare për një klasë ekuacionesh të valës jolineare të rendit më të lartë me terma logaritmikë.

$$\begin{aligned} u_{tt} + P + u + u_t |u|^2 u &= u \ln |u|^k, & (x, t) \in \Omega \times [0, T), \\ u(x, t) &= 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \text{ dhe } u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{aligned} \quad (2.11)$$

ku $\Omega \subset R^n$, ($n \geq 1$) është një bashkësi e kufizuar me kufi të butë $\partial\Omega$, $0 < k < 1$, k është një parametër i vogël dhe $P = (-\Delta)^m$, m është një numër natyral ($m \geq 1$). Ne merremi me vlerësimin e shuarjes së energjisë për (2.11).

Duke ndërtuar një funksion të përshtatshëm Lyapunov, marrim vlerësimin e shuarjessë energjisë për ekuacionin logaritmik të valës të rendit të lartë. Kështu qëllimi është të marrim një vlerësim të shuarjes së zgjidhjes së problemit (1.2) në bashkësi të qëndrueshme për të cilën zgjidhja e problemit sillet në mënyrë eksponenciale. Metoda është bazuar në ndërtimin e funksionit të përshtatshëm Lyapunov që shpreh një turbullim të vogël të energjisë. Duke përdorur metodën Gorka [23] marrim egzistencën globale të zgjidhjeve të dobëta për të gjitha $u_0 \in H_0^m, u_1 \in L^2$ për problemin e vlerës fillestare.

Lema dhe teorema që do të shfrytëzohen gjatë trajtimit të ekuacionit të valës:

Lema 1: (Inekuacioni logaritmik Sobolev)

Le të jetë u çdo funksion në $H_0^m(\Omega)$ dhe $a > 0$ të jetë çdo numër. Atëherë (shih [3, 5])

$$2 \int_{\Omega} |u|^2 \ln \frac{|u|}{\|u\|} dx + n(1 + \ln a) \|u\|^2 \leq \frac{a^2}{\pi} \int_{\Omega} \left| \frac{1}{2} u \right|^2 dx \quad (2.12)$$

Teorema 2: Supozojmë se $u_0 \in H_0^m(\Omega)$ dhe $u_1 \in L^2(\Omega)$, atëherë egziston një zgjidhje globale e dobët për problemin (1.2).

Vërtetim: Paraqesim dy $J(u)$ dhe $I(u)$ funksionale

$$J(u) = J(u(t)) = J(t) = \frac{1}{2} \left(\left\| P^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \|u\|^2 - \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^k dx \right) + \frac{1}{4} \|u\|_4^4 + \frac{k}{4} \|u\|^2 \quad (2.13)$$

$$I(u) = I(u(t)) = I(t) = \left\| P^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \|u\|^2 - \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^k dx + \frac{1}{2} \|u\|_4^4 \quad (2.14)$$

Shohim se

$$J(u) = J(u(t)) = \frac{1}{2} I(u) + \frac{k}{4} \|u\|^2 \text{ dhe } E(t) = \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + J(u) \quad (2.15)$$

Duke përdorur Lemën (1) të kombinuar me metodën Galerkin, shohim vërtetimin e teoremës (2). Shënojmë $w = u_t$ në ekuacionin 2.1 dhe duke përdorur faktin që

$$(u \ln u^k) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} u^2 \ln |u|^k - \frac{k}{4} u^2 ,$$

marrim

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\|u_t\|^2 \quad (2.16)$$

Përcaktojmë thellësinë potenciale dhe manifoldin e njohur Nehari si më poshtë:

$$d = \inf \{ \sup J(\lambda u), u \in H_0(\Omega) \setminus \{0\} \} \quad \lambda \geq 0 \quad (2.17)$$

$$N = \{u/ u \in H_0^m(\Omega) \setminus \{0\}, I(u) = 0, \|u\| \neq 0\} \quad (2.18)$$

Lema 3 Le të jetë $u \in H_0^m(\Omega) \setminus \{0\}$. Atëherë

$$a) \quad I(\lambda u) = \lambda \frac{d}{d\lambda} J(\lambda u) \text{ dhe } \lim_{\lambda \rightarrow 0} J(\lambda u) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} J(\lambda u) = -\infty$$

b) Ekziston një $\lambda^* = \lambda(u)$ unike e tillë që $\frac{d}{d\lambda} J(\lambda u)|_{\lambda=\lambda^*} = 0$, dhe $J(\lambda u)$ rritet në $0 < \lambda \leq \lambda^*$, zvogëlohet në $\lambda^* \leq \lambda < +\infty$ dhe arrin maksimumin në $\lambda = \lambda^*$. Me fjalë të tjera, egziston një $\lambda^* \in (0, +\infty)$ e tillë që $I(\lambda^* u) = 0$ dhe

$$I(\lambda u) = \lambda \frac{d}{d\lambda} J(\lambda u) > 0 \text{ për të gjitha } 0 < \lambda \leq \lambda^*, \quad I(\lambda u) < 0, \lambda > \lambda^* \quad (2.19)$$

ku

$$\lambda^* = \exp \frac{\left\| P^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \|u\|^2 - \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^k dx + \frac{1}{2} \|u\|_4^4}{k \|u\|^2}$$

Më pas, shihet lehtë se thellësia potenciale karakterizohet gjithashtu nga

$$d = \inf J(u) \quad u \in N \quad (2.20)$$

Lidhur me problemin (1.2) përcaktojmë nënbashkësinë e mëposhtëme të $H_0^m(\Omega)$:

$$W = \{u \in H_0^m(\Omega) | J(u) < d, I(u) > 0\} \text{ është bashkësia e qëndrueshme}$$

dhe

$$V = \{u \in H_0^m(\Omega) \mid J(u) < d, I(u) < 0\} \text{ është bashkësia e paqëndrueshme} \quad (2.21)$$

ku W dhe V janë quajtur respektivisht bashkësi e qëndrueshme dhe jo e qëndrueshme [13].

Lema 4 Le të jetë $u \in H_0^m(\Omega)$ dhe $l = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{\pi}{2}} e^n$.

- a) Nëse $0 < \|u\|^2 \leq l$, atëherë $I(u) \geq 0$. Nëse $I(u) = 0$ dhe $\|u\| \neq 0$,
($u \in N$) atëherë $\|u\|^2 \geq l$.
- b) Nëse $I(u) < 0$, atëherë $\|u\|^2 \geq l$.

Lema 5 $d \geq \frac{k}{4} \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{\pi}{2}} e^n = \frac{k}{4} l$, ku $l = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{\pi}{2}} e^n$

Vërtetim: Nëse marrim $I(u) = 0$ dhe $\|u\| = 0$, atëherë nga Lema 3 kemi $\|u\|^2 \geq l$. bashkë me Lemën 4 marrim

$$J(u) = J(u(t)) = \frac{1}{2}I(u) + \frac{k}{4}\|u\|^2 \geq \frac{k}{4} \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{\pi}{2}} e^n \quad (2.22)$$

dhe kemi $d \geq \frac{k}{4} l$.

Lema 6 Nëse $u_0 \in H_0^m(\Omega)$ dhe $u_1 \in L^2$, $0 < E(0) < d$ dhe u është një zgjidhje e dobët e problemit (1.2) në $[0, T)$, ku T është koha maksimale e egzistencës së zgjidhjes së dobët, atëherë

- a) $u \in V$ nëse $I(u_0) > 0$,
- b) $u \in W$ nëse $I(u_0) < 0$.

Vërtetim: Nga mosbarazimi i mëposhtëm i energjisë të zgjidhjeve të dobëta u të mbajtura në ekuacionin (2.2)

$$E(t) \leq E(0), \text{ për të gjitha } t \in [0, T), \text{ marrim}$$

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + J(u) \leq \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + J(u_0) < d \text{ për të gjitha } t \in [0, T), \quad (2.23)$$

2.5 Vlerësimet e zgjidhjes

Në këtë paragraf do të provojmë se zgjidhja do të rritet si një funksion eksponencial në $H_0^m(\Omega)$ kur koha shkon në infinit për energjinë fillestare pozitive të vogël ose $E(0) < 0$.

Teorema 1. Le të jetë $u_0 \in W$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ dhe $0 < E(0) < \frac{k}{4} l < d$, atëherë zgjidhja e (1.1) – (1.3) rritet si një funksion eksponencial në $H_0^m(\Omega)$.

Teorema 2. Le të jetë $u_0 \in W(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ dhe $0 < E(0) < \frac{ck}{4} < d$ ku c është një konstante e tillë që $0 < k^{\frac{4}{n}} c^{\frac{4}{n}} \frac{2\pi}{k} e^2 < 1$. Atëherë, egzistojnë dy konstante pozitive K dhe γ të pavarura nga t , të tilla që:

$$0 < E(t) < K e^{-\gamma t} < d, \quad t \geq 0$$

Vërtetim: Le të shënojmë $H(t) = -E(t)$. Le të jetë $u(t, x)$ një zgjidhje e dobët e problemit (2.1) – (2.2). Meqënëse $u_0 \in W(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, si kemi spjeguar më sipër kemi

$$u \in W \text{ për të gjitha } t \in (0, +\infty) \text{ dhe } 0 < E(t) < d \text{ dhe } I(u) > 0$$

Tani, ndërtojmë funksionin Lyapunov duke kryer një modifikim të përshtatshëm të energjisë

$$L(t) = E(t) + \varepsilon(u, u_t) \quad (\text{ku } \varepsilon > 0). \quad (2.24)$$

Nga përkufizimi i $E(t)$ dhe meqënëse $|(u, u_t)| \leq \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|u_t\|^2)$, atëherë dimë që $E(t)$ dhe $L(t)$ janë ekuivalente në kuptimin që egzistojnë dy konstante pozitive β_1 dhe β_2 që varen nga ε të tilla që

$$\beta_1 E(t) \leq L(t) \leq \beta_2 E(t) \quad (2.25)$$

Duke marrë derivatin e kohës të funksionit $L(t)$ dhe duke kryer integrimin me pjesë marrim

$$L'(t) = (\varepsilon - 1)\|u_t\|^2 + \varepsilon \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 - \varepsilon \|u\|^2 - \varepsilon \|u\|_4^4 - \varepsilon(u, u_t) + \varepsilon \int_{\Omega} u^2 \ln|u|^k dx \quad (2.26)$$

Kujtesë: Nga sa është përmendur më lart dimë

$$L'(t) = \left(1 + \varepsilon + \varepsilon \frac{M}{2}\right) \|u_t\|^2 + \varepsilon \frac{M-2}{2} + \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \varepsilon \frac{M-2}{2} + \|u\|^2 - \varepsilon \frac{M-2}{2} \int_{\Omega} u^2 \ln|u|^k dx + \varepsilon M H(t) + \frac{k}{4} \|u\|^2$$

dhe meqënëse $E(t) \leq E(0) \leq 0$ nga përkufizimi i $E(t)$, dimë që $\int_{\Omega} u^2 \ln|u|^k dx > 0$

Atëherë

$$L'(t) \geq \theta [\|u_t\|^2 + \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \|u\|^2 + H(t)], \text{ dhe}$$

$$H(t) = -E(t) \leq \int_{\Omega} u^2 \ln|u|^k dx \quad (2.27)$$

Tani duke përdorur mosbarazimin e njohur Young marrim

$$|(u, u_t)| \leq \frac{1}{4\delta} (\|u_t\|^2 + \delta \|u\|^2) \quad \text{per } \delta > 0 \quad (2.28)$$

Duke përdorur përkufizimin dhe duke futur (2.26) dhe (2.27), kemi

$$L'(t) \leq -M\varepsilon E(t) + \left(\frac{M\varepsilon}{2} + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{4\delta} - 1\right) \|u_t\|^2 + M\varepsilon E(t) + \varepsilon \left(\frac{M}{2} - 1\right) \left\|A^{\frac{1}{2}}\right\|^2 + \varepsilon \left(\frac{M}{2} + \delta - 1\right) \|u\|^2 + \frac{Mk}{4} \|u\|^2 + \varepsilon \left(\frac{M}{4} - 1\right) \|u\|_4^4 + \varepsilon \left(1 - \frac{M}{2}\right) \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^k dx \quad (2.29)$$

Kujtojmë tani mosbarazimin logaritmik Sobolev, për $0 \leq M \leq 1$

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq -M\varepsilon E(t) + \left(\frac{M\varepsilon}{2} + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{4\delta} - 1\right) \|u_t\|^2 + \varepsilon \left(\frac{M}{2} - 1\right) \left\|A^{\frac{1}{2}}\right\|^2 + \varepsilon \left(1 - \frac{M}{2}\right) \frac{k\alpha^2}{2\pi} \left\|A^{\frac{1}{2}}\right\|^2 + \\ &\varepsilon \left(\frac{M}{2} + \delta - 1\right) \|u\|^2 + \left(k\varepsilon \left(\frac{M}{4} - 1\right) \ln \|u\|^2\right) \|u\|^2 - \varepsilon n k \left(1 - \frac{M}{2}\right) \frac{1+\ln a}{2} \|u\|^2 \\ &= L'(t) \leq -M\varepsilon E(t) + \left(\frac{M\varepsilon}{2} + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{4\delta} - 1\right) \|u_t\|^2 - \varepsilon \left(1 - \frac{M}{2}\right) \left(1 - \frac{k\alpha^2}{2\pi}\right) \left\|A^{\frac{1}{2}}\right\|^2 + \varepsilon \left(\frac{M}{2} + \delta - 1 + k \left(1 - \frac{M}{2}\right) \ln \|u\|^2 - n k \left(1 - \frac{M}{2}\right) \frac{1+\ln a}{2}\right) \|u\|^2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Duke shënuar $1 - M/2 > 0$, meqënëse $0 < M < 1$, dhe $\ln \|u\|^2 < \ln \|u\|^2 (4J(u))$, marrim

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq -M\varepsilon E(t) + \left(\frac{M\varepsilon}{2} + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{4\delta} - 1\right) \|u_t\|^2 - \varepsilon \left(1 - \frac{M}{2}\right) \left(1 - \frac{k\alpha^2}{2\pi}\right) \left\|A^{\frac{1}{2}}\right\|^2 \\ &+ \varepsilon \left(\frac{M}{2} + \delta - 1 + k \left(1 - \frac{M}{2}\right) \ln(4J(u)) - n k \left(1 - \frac{M}{2}\right) \frac{1+\ln a}{2}\right) \|u\|^2 \\ &= -M\varepsilon E(t) + \left(\frac{M\varepsilon}{2} + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{4\delta} - 1\right) \|u_t\|^2 - \varepsilon \left(1 - \frac{M}{2}\right) \left(1 - \frac{k\alpha^2}{2\pi}\right) \left\|A^{\frac{1}{2}}\right\|^2 + \varepsilon \left(\frac{M}{2} + \delta - 1 + k \left(1 - \frac{M}{2}\right) \left(\ln(4J(u)) - n \frac{1+\ln a}{2}\right)\right) \|u\|^2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Meqënëse $0 \leq M \leq 1$, $J(u) < 0 < \frac{k\alpha^2}{4}$ duke përbushur $0 < k^{\frac{4}{n}} c^{\frac{4}{n}} \frac{2\pi}{k} e^2 < a^2 < \frac{2\pi}{k}$

ku a mund të sigurohet nga supozimi rreth α në Teoremën 1 dhe duke marrë $\delta > 0$ mjaftueshëm të vogël të tillë që

$$-1 - \frac{1-a^2}{2\pi} > 0, \quad \frac{M}{2} + \delta - 1 + k \left(1 - \frac{M}{2}\right) \left(\ln(4J(u)) - \frac{n(1+\ln a)}{2}\right) < 0$$

Atëherë kemi

$$L'(t) \leq -M\varepsilon E(t) + \left(\frac{M\varepsilon}{2} + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{4\delta} - 1\right) \|u_t\|^2 \quad (2.32)$$

Le të marrim $\varepsilon > 0$ mjaftueshëm të vogël të tillë që $\frac{M\varepsilon}{2} + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{4\delta} - 1 < 0$

Kështu, mosbarazimi (2.32) bëhet

$$L'(t) \leq -M\varepsilon E(t)$$

Duke përdorur (2.25), kemi

$$L'(t) \leq -M\beta_2 L(t) \quad (2.33)$$

Duke vendosur $K = M\varepsilon E(t)$ dhe duke integruar mosbarazimin (2.33) midis 0 dhe t marrim si më poshtë:

$$L(t) \leq Ce^{Kt} \quad (2.34)$$

Kjo përfundon vërtetimin e Teoremës 2.

KAPITULLI III

EKUACIONI I VALËS SË UJIT TË CEKËT

3.1 Njohuri mbi ekuacionet e valës së ujit të cekët

Siç e kemi përmendur, ekuacioni Korteweg-deVries është i rëndësishëm pasi ai shfaqet në shumë kontekste fizike. Ai mund të përdoret për të përshkruar valët në ujë të cekët, rrjetat jolineare joharmonike, dinamikat e gazit dhe valët hidromagnetike.

Ekuacioni i modifikuar KdV do të luaj një rol të rëndësishëm në atë më poshtë,

$$v_t + 6v^2v_x + v_{xxx} = 0$$

Në veçanti riformulojmë ekuacionin Camassa – Holm duke përdorur një grup të ndryshëm të variablave dhe marrim një sistem gysmëlinear të ekuacioneve diferenciale.

$$u_t - u_{xxt} + 2ku_x + 3uu_{xx} - uu_{xxx} = 0, \quad u|_{t=0} = \bar{u}$$

Ky ekuacion ka marrë një vëmendje të konsiderueshme dekadën e fundit. Nëse konsiderojmë rastin $k = 0$ në drejtëzën reale që është

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x - 2u_xu_{xx} - uu_{xxx} = 0$$

dhe tani e tutje i referohemi si ekuacioni Camassa – Holm.

Rrjedhat e ujit të cekët karakterizohen nga zona rrjedhje me një sipërfaqe të lirë. Ekuacionet e valës së ujit të cekët formojnë një sistem hiperbolik jolinear. Ekuacionet shpesh pranojnë zgjidhje jo të vazhdueshme dhe zgjidhjet analitike janë të limituara, në shumë pak raste ideale.

Ekuacionet e ujit të cekët modelojnë përhapjen e turbulencës në ujë dhe lëngje të tjerë. Ekuacionet nxirren duke u mbështetur në parimet e ruajtjes së masës dhe ruajtjes së momentit. Variablat e pavarur janë koha t , dhe dy koordinatat e hapësirës, x dhe y . Variablat e varur janë lartësia e lëngut ose thellësia h , dhe fusha dydimensionale e shpejtësisë së lëngut, u dhe v . Me zgjedhjen e duhur të njërive, sasitë e ruajtura janë masa, e cila është në përpjesëtim të drejtë me h , dhe momenti, i cili është përpjesëtim në të drejtë me uh dhe vh . Forca e veprimit mbi lëng është graviteti, i përfaqësuar nga konstantja gravitacionale g .

Pjesa më madhe e rrjedhave të ujit të cekët të interesit praktik është dydimensionale. Shumë metoda kompjuterike për simulimin e rrjedhave dydimensionale bazohen fuqimisht në teknikat numerike të përdorura për të modeluar rrjedhat njëdimensionale.

Ekuacioni Camassa – Holm përdor një gup të ndryshëm të variablave dhe përfton një sistem gjysmëlinear të ekuacioneve diferenciale të zakonshme. Problemi Koshi për ekuacionin Camassa – Holm [31], [34]

$$u_t - u_{xxt} + 2ku_x + 3uu_{xx} - uu_{xxx} = 0, \quad u|_{t=0} = \bar{u} \quad (3.1)$$

me k pozitive modelon (shih [37]), përhapjen valëve gravitacionale njëkahëshe në ujë të cekët, me u që përfaqëson shpejtësinë e lëngut. Ekuacioni Camassa-Holm ka një strukturë bi-Hamiltoniane dhe është plotësisht i integrueshëm. Ai ka sasi të pafundme të ruajtura. Në veçanti, për zgjidhjet e buta sasi të

$$\int u \, dx, \quad \int (u^2 + u_x^2) \, dx, \quad \int (u^3 + uu_x^2) \, dx \quad (3.2)$$

janë gjithë kohën të pavarura.

Ne do të shqyrtojmë rastin $k = 0$ në drejtëzën reale që është

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0 \quad (3.3)$$

dhe tani e tutje do ti referohemi (3.3)-it si ekuacioni Camassa – Holm.

Ekuacioni mund të rishkruhet si sistemi i mëposhtëm

$$u_t + uu_x + P_x = 0, \quad (3.4a)$$

$$P - P_{xx} = u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 \quad (3.4b)$$

Ekuacionet e tipit Boussinesq (BE) me jolinearitë logaritmik.

Këto ekuacione janë një zgjerim i ekuacioneve të valës së ujit të cekët. Dinamika e valëve të ujit të cekët, që janë parë në vende të ndryshme si bregdet, liqene dhe lumenj, udhëhiqen nga Ekuacionet Boussinesq (BE). Ekuacioni BE jep një përafrim shumë më të mirë për valë të tilla si p.sh përftimi i ligjeve të ruajtjes së këtyre ekuacioneve. Shumë shkencëtarë studiojnë valët e ujit të cekët dhe dinamikën e tyre, që përshkruhen nga ekuacioni Boussinesq duke patur jolinearitë logaritmik. Ekuacioni Boussinesq korespondues është si më poshtë.

$$q_{tt} - k^2 q_{xx} + a(q \ln q)_{xx} + b_1 q_{xxxx} + b_2 q_{xxtt} = 0 \quad (3.5)$$

Në këtë ekuacion $q(x,t)$ përfaqëson profilin e valës, ku variablat e pavarur x dhe t përfaqësojnë respektivisht koordinatat hapësinore dhe kohore. Dy termat e para në ekuacion përfaqësojnë

operatorin e valës. Koeficienti është termi jolinear logaritmik. Koeficientët b_1 dhe b_2 janë termat e shpërndarjes, ku në veçanti, koeficientët b_2 japin shpërndarjen hapësinore kohore.

Ekuacionet e ujit të cekët dhe ekuacionet Boussinesq mund të përdoren për të modeluar këto rrjedha të ndërprera, por vetëm kjo e fundit mund të reflektojë luhatjet e vëzhguara pranë ndërprerjes. Në përgjithësi, nuk ka rëndësi që ekuacionet e ujërave të cekëta nuk kapin këto lëkundje, pasi sjellja e valëve sipërfaqësore pranë këtij rajoni nuk është e rëndësishme për parashikimin e fluksit të rrymës ose frontit të goditjes. Megjithatë në disa raste mund të jenë të rëndësishme dhe ekuacionet Boussinesq (po ashtu, ekuacionet Euler) ofrojnë të vetmet mjete për të studiuar këtë fenomen.

Ekuacioni Camassa-Holm

Tema kryesore e këtij vështrimi është studimi i një ekuacioni diferencial me derivate të pjesshme, në veçanti ekuacioni Camassa-Holm. Ky ekuacion gëzon shumë veti të shquara matematikore. Ai është bi-Hamiltonian, pra ai zotëron dy Hamiltonian të dallueshëm por të pajtueshëm. Ekuacioni Camassa-Holm (CH) :

$$(u - u_{xx})_t + 3uu_x = \varepsilon (2 u_x u_{xx} + uu_{xxx}) , \quad x \in \Omega, t > 0 \quad (3.6)$$

$$\text{ose} \quad u_t - u_{txx} + 3uu_x - 2 u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0 \quad (3.7)$$

Ekuacioni i modifikuar KdV.

Një ekuacion i ngjashëm që do të luaj një rol të rëndësishëm në atë që vjen më poshtë njihet si *ekuacioni i modifikuar KdV*, shkurtimisht ekuacioni MKdV:

$$u_t + uu_x - uu_{xxx} = 0$$

$$\text{ose} \quad v_t + 6v^2v_x - v_{xxx} = 0 \quad (3.8)$$

Në rrjedhën e përpjekjes për të zgjidhur saktësisht ekuacionin KdV, u zbulua që ekuacioni ka një varg të pafundëm të ligjeve të ruajtjes, të cilat do t'i përcaktojmë tani.

Duke ndjekur metodologjinë e përshkruar për sistemet e përgjithshme bi-Hamiltoniane është e mundur të derivohet një numër i pafundëm i sasive të ruajtuara për zgjidhjet e (3.6); llogaritja kryhet në detaje. Origjina e ekuacionit Camassa-Holm është përshkruar në një artikull nga Fuchssteiner dhe Fokas ([40]) që prej vitit 1981 ku ai shfaqet si një element i një familjeje të tërë të ekuacioneve bi-Hamiltoniane të gjeneruara nga metoda e operatorit të rekursionit. Megjithatë disa koeficientë nuk ishin llogaritur në mënyrë korrekte. Kjo mund të jetë arsyeja pse nuk i është kushtuar vëmendje e veçantë deri në rizbulimin e saj në 1993 nga Camassa dhe Holm në kontekstin e valës së ujit [36, 37]. Ata paraqitën ekuacionin (1) si një model për përhapjen e

valës së ujit njëkahëshe në ujë të cekët, me u që përfaqëson lartësinë e sipërfaqes së lirë të ujit mbi fundin e sheshtë. Rëndësia e ekuacionit si një model për ujë të cekët del në paragrafët pasardhës.

Ekuacioni Camassa Holm për valët e ujit të cekët

Ekuacioni Camassa-Holm dhe ekuacioni Degasperis-Procesi janë dy ekuacione që përmbushin kushtine integrueshmërisë së plotë.

Nga një këndvështrim matematikor, ekuacioni Camassa-Holm është i mirë studiuar. Rëndësia e ekuacionit si një model për ujin e cekët është studiuar më pas nga Johnson. Në [41]-[43]. Degasperis dhe Procesi fillimisht studiuuan familjen e mëposhtme të ligjeve të ruajtjes së rendit të tretë PDE me kushte kufitare

$$u_t + c_0 u_x + \gamma u_{xxt} - \alpha^2 u_{xx} = (c_1 u^2 + c_2 u_x^2 + c_3 u_{xx})_x, \quad x \in \Omega, t > 0 \quad (3.9)$$

ku $\alpha, c_0, c_1, c_2, c_3$ janë konstante reale dhe indekset tregojnë derivatet e pjesshme. Me Ω është shënuar një bashkësi ku janë përcaktuar funksionet, për shembull $\Omega = [0, 1]$.

Në vitin 1993 Camassa dhe Holm morrën ekuacionin (3.9) me $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 0$ si një model për përhapjen e valës ujore njëkahëshe në ujë të cekët me u që përfaqëson lartësinë e sipërfaqes së lirë të ujit mbi fundin e sheshtë. Ekuacioni Camassa-Holm është si më poshtë:

$$(u - \varepsilon u_{xx})_t + k u_x + 3 u u_x = \varepsilon (2 u_x u_{xx} + u u_{xxx}) , \quad x \in \Omega, t > 0 \quad (3.10)$$

Për $\varepsilon = 0$ në ekuacionin (3.10) marrim ekuacionin e njohur KdV :

$$u_t + k u_x + \alpha u u_x + \gamma u_{xxx} = 0 \quad (3.11)$$

Të dy përshkruajnë valët njëkahëshe të ujit të cekët. Për më tepër, të gjithë këto ekuacione kanë një strukturë bi-Hamiltoniane, ato janë plotësisht të integrueshme, ato kanë sasi të pafundme të ruajtura.

Duke ndjekur metodologjinë e përshkruar në [46] për sistemet e përgjithshme bi-Hamiltoniane, është e mundur të derivojmë një numër të pafundëm të sasive të ruajtura për zgjidhjet e (3.9). Problemi konsiston në llogaritjen e fushës së largët të shpërndarjes mbi një pengesë “forma” e të cilës është përcaktuar në një farë mënyre nga u (për t -fikse). Në praktikë, kjo do të thotë gjetja e vlerave vetiake të një operatori linear që varet nga $u(t, x)$. Fakt i njohur është që kur koha evolon, nëse $u(t, x)$ përmbush (3.9), atëherë këto vlera vetiake përmbushin ekuacionet diferenciale lineare të zakonshme të cilat mund të zgjidhen në mënyrë eksplicite dhe fusha e largët mund të përcaktohet për çdo kohë. Problem i anasjelltë i shpërndarjes konsiston në rigjetjen e “formës” të pengesës, e cila është u , nga njohuritë mbi fushën e largët të shpërndarjes.

Kur $c_1 = \frac{\alpha}{2}$ dhe $c_2 = \frac{\varepsilon(\beta-1)}{2}$ dhe $c_3 = \varepsilon$, duke zëvendësuar c_0 me k dhe α^2 me ε në ekuacionin (1-1), marrim *ekuacionin e përgjithshëm të valës së ujit të cekët* si më poshtë:

$$(u - \varepsilon u_{xx}) + ku_x + \alpha uu_x + \gamma u_{xxx} = \varepsilon (\beta u_x u_{xx} + uu_{xxx}) , \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (3.12)$$

Egzistojnë të paktën tre ekuacione të famshme që përmbushin kushtin e integrueshmërisë së plotë brenda kësaj familjeje: ekuacioni KdV (shih [44]), ekuacioni Camassa-Holm (shih [45]), dhe ekuacioni Degasperis-Procesi (shih [41]-[43]).

Ekuacionet e ujit të cekët modelojnë shpërndarjen e turbulencës në ujë dhe lëngje të tjerë. *Rrjedhat e ujit të cekët* karakterizohen nga zona rrjedhjeje me sipërfaqe të lirë. Ekuacionet e valës së ujit të cekët formojnë një sistem hiperbolik jo linear. Ekuacionet shpesh pranojnë zgjidhje jo të vazhdueshme dhe zgjidhjet analitike janë të limituara në shumë pak raste ideale. Thellësia e lëngut është e vogël krahasuar me gjatësinë e valës së turbulencës.

Në veçanti, kujtojmë që egzistenca dhe rezultatet unike për zgjidhjet globale të dobëta janë vërtetuar nga Constantin dhe Escher [48], dhe Xin dhe Zhang [49].

Ekuacioni logaritmik në dinamikë

Në paragrafin e kaluar paraqitëm modelin e ekuacionit që është i lidhur ngushtë me ekuacionin e mëposhtëm me jolinaritet logaritmik. Ky lloj ekuacioni rrjedh nga shumë aplikime në shumë degë të fizikës si fizika bërthamore, optika dhe gjeofizika. [51,56,57].

$$\begin{aligned} u_{tt} - (\Delta)^2 u + u - \varepsilon \log |u|^2 + |u|^2 u &= 0 , \quad (x, t) \in Q \times (0, T) \\ u(x, t) &= 0 , \quad (x, t) \in \partial Q \times (0, T) \\ u(x, 0) &= u^0(x) \text{ dhe } u_t(x, 0) = u^1(x) , \quad x \in \Omega , \end{aligned} \quad (3.13)$$

ku Q është një segment i fundëm $[a, b]$, parametri ε forca e ndërveprimit jolinear dhe efektet jolineare në mekanikën kuantike janë shumë të vogla. Problemi është një version relativ i mekanikës kuantike logaritmike të paraqitur në [53, 54].

Trajtuar egzistencën e zgjidhjeve të dobëta për problemin e vlerës fillestare të ekuacionit logaritmik të valës:

$$\begin{aligned} u_{tt} - Au + u + u_t - u \log |u|^k + |u|^k u &= 0 \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) &= 0 , \quad (x, t) \in \partial \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) &= u^0(x) \text{ dhe } u_t(x, 0) = u^1(x) , \quad x \in \Omega , \end{aligned} \quad (3.14)$$

ku $\Omega \subset R^n$, $n \geq 1$, është një bashkësi e kufizuar me kufi të butë $\partial \Omega$, $k \geq 1$ është një numër i plotë dhe $A = (\Delta)^m$, ($m \geq 1$ është një parametër). Këtu u është një fushë komplekse skalare.

Modeli (3.14) është paraqitur për studimin e dinamikave në fizikën teorike. Jo lineariteti logaritmik është më me interes në fizikë, pasi ai shfaqet natyrisht në kozmologji dhe teorinë e fushës simetrike, mekanikën kuantike dhe fizikën bërthamore. Këto probleme shfaqen në shumë degë të fizikës siç është fizika bërthamore, optika dhe gjeofizika. Modeli paraqitet gjithashtu në teorinë e fushës kuantike.

Matematikantët Cazenave dhe Haraux provuan ekzistencën e një zgjidhjeje për ekuacionin e mëposhtëm

$$u_{tt} + A + u + u_t |u|^2 u = u \ln |u|, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (3.15)$$

për studimin e dinamikës në fizikën teorike. Cazenave dhe Haraux vërtetuan ekzistencën dhe unicitetin e një zgjidhjeje për problemin Koshi për ekuacionin e mëposhtëm në R^n .

$$u_{tt} + A = u \ln |u|^k, \quad (3.16)$$

Problemi ynë është në rastin k -dimensional në H_0^m dhe përfshin një tjetër term jolinear $u \log |u|^k$; nuk ka kufizime mbi koeficientin e termit logaritmik jolinear $u \log |u|^k$.

Kryesisht vendosim ekzistencën globale të zgjidhjeve të dobëta të problemit (3.14). Së pari shkruajmë problemin në një version të dobët. Së dyti ndërtojmë zgjidhjet e përafërta nga metoda Galerkin. Në fund vërtetojmë konvergjencën e vargut të zgjidhjeve të përafërta.

Për të marrë vlerësimet apriori të zgjidhjeve të përafërta, përdorim mosbarazimin logaritmik Sobolev dhe mosbarazimin logaritmik Gronwall.

3.2 Ekuacioni Camassa-Holm

3.2.1 Struktura matematikore e ekuacionit Camassa-Holm

Ekuacioni është formalisht i integrueshëm me anë të teknikave të shpërndarjes dhe shpërndarjes së anasjelltë. Problemi i shpërndarjes konsiston në llogaritjen e fushës së largët të shpërndarjes mbi një pengesë forma e të cilës përcaktohet në një farë mënyre nga u (për t fikse). Në praktikë, kjo do të thotë të gjejmë vlerat vetjake të një operatori linear që varen nga $u(t, x)$. Fakt i njohur është që kur koha evolon, nëse $u(t, x)$ përmbysh (3.9), atëherë këto vlera vetiake përmbyshin ekuacionet diferenciale lineare triviale të cilat mund të zgjidhen në mënyrë eksplicite dhe fusha e largët mund të përcaktohet për çdo kohë. Problemi i shpërndarjes së anasjelltë konsiston në rigjetjen e formës së pengesës, që është $u(t, x)$, nga njohuritë mbi fushën e largët të

shpërndarjes. Ky është gjithashtu një problem jo praktik por gjithsesi linear kështu çdokush mund ta mendojë metodën e shpërndarjes së ansjelltë si një mënyrë e linearizimit të ekuacionit. Nëse ky përafrim mund të ndiqet (formalisht) atëherë sistemi është i integrueshëm (formalisht) dhe zgjidhjet e ekuacionit Camassa-Holm egzistojnë dhe mund të llogariten. Për një klasë të madhe të të dhënave fillestare, është vërtetë e mundur, shih [37], [39]. Rezulton se shumë ekuacione rëndësishme kanë të njëjtën strukturë

$$u_t + ku_x + \alpha uu_x + \gamma u_{xxx} = 0$$

dhe një lloj special të zgjidhjeve, të ashtuquajturat solitone. Një soliton i vetëm është një valë udhëtuese shpejtësia e të cilës është në përpjesëtim të drejtë me lartësinë. Ajo që i bën solitonet kaq të veçanta është që kur dikush kombinon disa prej tyre ato ndërveprojnë mirë dhe ruajnë formën e tyre pas bashkëveprimit, shih Figura 1 për njëndërveprim të dy solitoneve në rastin e ekuacionit KdV. Ekuacioni Camassa-Holm gjithashtu zotëron zgjidhje të tipit soliton, të cilat për shkak të formave të tyre, iu është dhënë emri kulmore.

Kujtojmë edhe njëherë të riformuluar ekuacionin Camassa-Holm duke përdorur një grup të ndryshëm variablash dhe përfutur një sistem gjysmëlinear të ekuacioneve diferenciale të zakonshme si Bressan dhe Constantin ([31]). Problemi Koshi për ekuacionin Camassa – Holm ([34], [35]). Ai është bi-Hamiltonian, pra ai zotëron dy Hamiltonian të dallueshëm por të pajtueshëm. Ekuacioni Camassa-Holm (CH) :

$$(u - u_{xx})_t + 3uu_x = \varepsilon (2 u_x u_{xx} + uu_{xxx}) , \quad x \in \Omega, t > 0$$

ose

$$u_t - u_{xxt} + 2ku_x + 3uu_{xx} - uu_{xxx} = 0, \quad u|_{t=0} = \bar{u}$$

Me k pozitive ai modelon, (shih [32], [37]), përhapjen e valëve gravitacionale njëkahëshe në ujë të cekët, me u që përfaqëson shpejtësinë e fushës. Ekuacioni Camassa-Holm ka një strukturë bi-Hamiltoniane dhe është plotësisht i integrueshëm.

Në këtë pjesë do të shqyrtojmë rastin $k = 0$ në drejtëzën reale, që është

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0$$

Në rastin e përgjithshëm, ekuacionin C-H e përmendëm

$$u_t + c_0 u_x + \gamma u_{xxtt} - \alpha^2 u_{xx} = (c_1 u^2 + c_2 u_x^2 + c_3 u_{xx})_x, \quad x \in \Omega, t > 0 \quad (3.17)$$

dhe pas kësaj i referohemi ekuacionit (3.17) si ekuacioni Camassa – Holm.

Ekuacioni mund te rishkruhet si sistemi i mëposhtëm

$$u_t + uu_x + P_x = 0, \quad (3.18a)$$

$$P - P_{xx} = u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 \quad (3.18b)$$

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^n p_i(t) e^{-|x-q_i(t)|}, \quad (3.19)$$

Kur $c_1 = \frac{\alpha}{2}$ dhe $c_2 = \frac{\varepsilon(\beta-1)}{2}$ dhe $c_3 = \varepsilon$, duke zëvendësuar c_0 me k dhe α^2 me ε në ekuacionin themelor, marrim ekuacionin e përgjithshëm të vales së ujit të cekët si më poshtë:

$$(u - \varepsilon u_{xx}) + ku_x + \alpha uu_x + \gamma u_{xxx} = \varepsilon (\beta u_x u_{xx} + uu_{xxx}) , \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (3.20)$$

Ekuacioni Camassa-Holm gjithashtu zotëron zgjidhje të tipit soliton, të cilat për shkak të formave të tyre , u është dhënë emri kulmore. Një kulmore e vetme jepet nga

$$u(t, x) = ce^{|x-ct|} \quad (3.21)$$

Shpejtësia e lëvizjes është e barabartë me lartësinë e kulmit. Duke marrë një kombinim linear të kulmoreve marrim atë që quhet zgjidhja shumëkulmore. Shumëkulmoret kanë trajtën e mëposhteme.

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^n p_i(t) e^{-|x-q_i(t)|} \quad (3.22)$$

ku $p_i(t)$ dhe $q_i(t)$ janë zgjidhjet e sistemit të mëposhtëm të ekuacioneve diferenciale të zakonshme.

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^n p_j(t) e^{-|q_i(t)-q_j(t)|} \quad \text{dhe} \quad p_i(t) = \sum_{j=1}^n p_i p_j \operatorname{sgn}(q_i - q_j) e^{-|q_i(t)-q_j(t)|} \quad (3.23)$$

Në kulme, derivati është jo i vazhdueshëm dhe shumëkulmoret mund të jenë vetëm zgjidhjet e ekuacionit (3.17) . Sistemi i ekuacioneve është hamiltonian.

Për H të dhënë nga $H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_i p_j e^{-|q_i(t)-q_j(t)|}$, mund të rishkruhet si

$$q_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{dhe} \quad p_i(t) = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (3.24)$$

Zgjidhjet shumëkulmore siç jepen nga (3.23) mund të shihen si version diskret i ekuacionit Camassa-Holm , shih [35].

3.2.2 Egzistenca e zgjidhjeve globale për ekuacionin C-H

Ekuacioni origjinal (3.6) i cili korrespondon me formulimin Euler të problemit përmban vetëm një funksion të panjohur, fushën e shpejtësisë u . Përshkrimi i Lagranzhit përmban dy funksione të panjohura: pozicionin dhe shpejtësinë e grimcave, y dhe U .

I- Egzistenca lokale e zgjidhjes

Egzistenca lokale dhe zgjidhjet janë studiuar duke përdorur një teknikë rregullimi. Është treguar se, për $u_0 \in H^s(R)$ me $s > \frac{3}{2}$, egziston një zgjidhje e vetme u me $u(t, x) \in C((0, T), H^s(R)) \cap C^1((0, T), H^{\frac{3}{2}}(R))$, ku $T > 0$ varet vetëm nga $\|u_0\|_{H^s(R)}$.

Zgjidhjet duhen konsideruar në kuptimin e dobët ose në kuptimin e shpërndarjes. Ekuacioni C-H mund të rishkruhet si më poshtë në sistemin e ekuacioneve :

$$u_t + uu_x + P_x = 0 \quad (3.25a)$$

$$P - P_{xx} = u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 \quad (3.25b)$$

Operatori $1 - \partial_{xx}$ është një bijeksion nga S' në S' , ku S' përcakton klasën e shpërndarjes dhe një kusht të mjaftueshëm për ekuacionin për tu mbajtur në kuptimin e shpërndarjes është për shembull që

$$u(t, x) \in L^1(R, H^1(R)) \quad (3.26)$$

Hapi i parë i madh në këtë drejtim u realizua nga Constantin dhe Escher. Ata provuan se, për $u_0 \in H^1(R)$ dhe $u_0 - u_{0,xx} \in M^+(R)$, ku $M^+(R)$ është hapësira e masave pozitive Radon, ekuacioni C-H pranon një zgjidhje të vetme globale në $u(t, x) \in C^1((R, L^2(R)) \cap C(R, H^1(R)))$.

Ata shqyrtuan një përafrim të butë të të dhënës fillestare, e cila për thjeshtësi përcaktohet me u_0 , duke përmbyshur kushtin $u_0 - u_{0,xx} \geq 0$ dhe zgjidhja koresponduese u e dhënë nga teoria e egzistencës lokale. Formalisht, rrjedh direkt nga (3.20) që

$$(u - u_{xx})(t, x) \geq 0 \quad (3.27)$$

për $t \in (0, T)$ dhe $x \in R$. Një vërtetim rigoroz i (3.27) jepet në [40]. Fakti që shenja e $u - u_{xx}$ ruhet çon në një vlerësim apriori për variacionin e plote të u_{xx} si llogaritja e thjeshtë treguar më poshtë. Kemi

$$\|u_{xx}\|_{M(R)} \leq 2\|u\|_{L^1(R)} \quad (3.28)$$

sepse $\|u_{xx}\|_{M(R)} = \int_R |u_{xx}| dx \leq \int_R |u - u_{xx}| dx + \int_R |u| dx = 2 \int_R |u| dx$

Shohim se $\int_R |u| dx = \int_R u dx = \int_R u_0 dx$ dhe $\int_R u dx$ është një sasi e ruajtur.

Si pasojë, $\|u_{xx}\|_{M(R)} \leq 2\|u_0\|_{L^1(R)}$. Ky kusht nënkupton që u_x mbetet e kufizuar dhe situata e goditjes, nuk mund të ndodhë. Nuk ka thyerje të valës dhe zgjidhja egziston globalisht në kohë. Për më tepër, ai jep një kontroll të mjaftueshëm mbi zgjidhjet e përafërta për të provuar nëpërmjet kompaktësisë ekzistencën e zgjidhjeve në $C(R, H^1(R))$.

II- Egzistenca e zgjidhjes duke përdorur përfarimet viskoze të ekuacionit

Le të përcaktojmë $E(t) = \|u(t, x)\|_{H^1(R)}$ energjinë e sistemit. Në rastin e kohës të kthyeshme ilustruar në Figurën 4, për çdo t të ndryshme nga koha e përplasjes ($t \neq 0$), $E(t)$ mbetet e barabartë me të njëjtën konstante pozitive, themi që $E(t) = 1$, ndërsa në kohën e përplasjes, kemi $E(0) = 0$.

Duke përdorur përfarimin viskoz të ekuacionit, dy matematikanët Xin dhe Zhang përftuan ekzistencën e një zgjidhjeje $u(t, x) \in C((0, \infty) \times R^1) \cap L^\infty((0, \infty), H^1(R))$ për ekuacionin Camassa Holm për çdo të dhënë fillestare në $u_0 \in H^1(R)$.

Në veçanti zgjidhja e tyre përmbush

$$E(t) = \|u(t, \cdot)\|_{H^1(R)} \leq E(t') = \|u(t', \cdot)\|_{H^1(R)} \quad (3.29)$$

për të gjitha $t < t'$ dhe vlerësimi i njëanshëm i mëposhtëm në u_x qëndron

$$u_x(t, x) \leq \frac{1}{t} + C, \quad t > 0, x \in R \quad (3.30)$$

Për shkak të (3.29), i quajmë këto zgjidhje disipative: energjia vetëm mund të shuhet (proçesi i shuarjes së valës). Provohet se zgjidhjet janë të vetme.

Përafrimi i adoptuar në [35] nga Bressan dhe Fonte është i ndryshëm në thelb. Ata filluan me shqyrtimin e sistemit të shumëkulmoreve dhe përshkruan dinamikën e sistemit, në veçanti sesi shumëkulmoret evolonin nëpërmjet përplasjeve. Në këtë fazë, ata zgjedhën zgjidhjen konservatore. Më pas, ata paraqitën një distancë funksionale e frymëzuar nga teoria optimale e transportit, e cila përmbush

$$\frac{d}{dt} J(u(t), v(t)) \leq k J(u(t), v(t)) \quad (3.31)$$

për çdo zgjidhje shumëkulmore konservative $u(t)$ dhe $v(t)$. Zgjidhjet e përgjithshme për ekuacionin Camassa-Holm janë ndërtuar përfundimisht nga shumëkulmoret me një argument densiteti.

Riformulojmë ekuacionin duke përdorur një bashkësi të re të variablave. Variablat $(y; U; H)$ që përdorim kanë një interpretim natyral nga këndvështrimi Lagranzhian. Në [34], Bressan dhe Constantin paraqitën një bashkësi të re të variablave,

$$w = u(t; y); \quad v = 2 \arctan u_x(t, x); \quad q = (1 + u_x^2) y_\xi \quad (3.32)$$

ku $y(t; \xi)$ përcakton karakteristikat d.m.th., $y(t; \xi) = u(t; y(t; \xi))$. Ata rishkruan ekuacionin C-H në termat e këtyre variablave të rinj dhe sistemi i ekuacioneve që përfutuan rezultoi të jetë një sistem i mirëparaqitur i ekuacioneve diferenciale të zakonshme në hapësirën Banach. Ekuacionet diferenciale të zakonshme janë në funksion me kohën dhe me të vërtetë ky ndryshim i variablit merr zgjidhjen e kohës së kthyeshme në problemin antisimetrik kulmor-antikulmor.

III- Skema numerike për ekuacionet Camassa-Holm

Ekuacioni Camassa-Holm

$$u_t - u_{txx} + 2\kappa u_x + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0$$

zotëron shumë veti intriguese: si për shembull, plotësisht i integrueshëm dhe përjeton thyerjen e valës në kohë të limituar për një klasë të madhe të të dhënave fillestare.

Në këtë paragraf do të shqyrtojmë rastin $\kappa = 0$ në drejtëzën reale, e cila është

$$u_t - u_{txx} + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0$$

Rezultatet lokale dhe globale si dhe rezultatet e thyerjes janë vërtetuar në [38, 40]. Dihet se disa dhëna fillestare japin zgjidhje globale, ndërsa klasa të tjera të të dhënave fillestare provojnë thyerjen e valës në kuptimin që u_x bëhet i pakufizuar ndërsa vetë zgjidhja mbetet e kufizuar. Në mënyrë më të saktë, teorema themelore e egzistencës, sipas Constantin, Escher, dhe Molinet [37, 39], është si më poshtë:

Teoremë: Nëse $u_0 \in H^1(R)$ dhe $m_0 = u_0 - u_0''$ janë masat pozitive Radon, atëherë ekuacioni (3-2) ka një zgjidhje të vetme globale të dobët $u \in C((0, T), H^1(R))$, për çdo T pozitive, me të dhëna fillestare u_0 .

Ekuacioni Camassa-Holm (3.7) paraqet të ashtuquajturat zgjidhjet shumëkulmore d.m.th., zgjidhjet e trajtës

$$u(t, x) = \sum_1^n p_i(t) e^{-|x - q_i(t)|}$$

ku $p_i(t)$ dhe $q_i(t)$ janë zgjidhjet e sistemit të mëposhtëm të ekuacioneve diferenciale të zakonshme.

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^n p_j(t) e^{-|q_i(t) - q_j(t)|}$$

dhe
$$p_i(t) = \sum_{j=1}^n p_i p_j \operatorname{sgn}(q_i - q_j) e^{-|q_i(t) - q_j(t)|}$$

Duke marrë parasysh siç kemi shpjeguar, për H të dhënë nga $H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_i p_j e^{-|q_i(t) - q_j(t)|}$, ai mund të shkruhet si $q_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ dhe $p_i(t) = \frac{\partial H}{\partial q_i}$.

Ne merremi me përdorimin e shumëkulmoreve për zgjidhjet e përafrimit të ekuacionit Camassa-Holm. Kjo krijon një skemë numerike për të cilën ne provuam konvergjencën. Camassa, Holm, dhe Hyman përdorën një metodë pseudospektrale për të zgjidhur (3.7) numerikisht por ata nuk studiuan konvergjencën e metodës.

Është treguar në [33] se si një skemë e veçantë diferenciale e fundme konvergjon në zgjidhjen globale unike në rastin me të dhëna fillestare periodike. Ideja e përdorimit të shumëkulmoreve është përdorur gjithashtu dhe nga Camassa, Huang, dhe Lee në [33, 35, 36]. Në [33], Camassa riformuloi ekuacionin në termat e karakteristikave. Karakteristikat $q(\xi; t)$ përafrohen si zgjidhje të ekuacionit

$$q_t(\xi; t) = m(q(\xi; t), t)$$

me kushtin fillestar $q(\xi; t) = \xi$.

Le të konsiderojmë momenmtin $m = u - u_{xx}$ të sistemit dhe fusim variablin p që lidhet direkt me momentin si:

$$p(\xi; t) = m(q(\xi; t), \frac{\partial q}{\partial \xi}(\xi; t)),$$

Camassa tregon se ekuacioni (3.7) reduktohet në sistemin e mëposhtëm të ekuacioneve diferenciale me derivate të pjesëshme

$$q_t(\xi; t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|q(\xi; t) - q(\mu; t)|) p(\mu; t) d\mu$$

$$p_t(\xi; t) = \frac{1}{2} p(\xi; t) \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(\xi - \mu) \exp(-|q(\xi; t) - q(\mu; t)|) p(\mu; t) d\mu$$

Në [35, 37], Camassa, Huang, diskretizuan sistemin e mësipërm duke marrë parasysh një numër të fundëm n të grimcave, pozicionet dhe momentet e të cilave janë dhënë nga $q_i(t) =$

$q(\xi_i; t)$ dhe $p_i(t) = p(\xi_i; t)$ për disa ξ_i të shpërndara, duke përafruar integralet në sistemin më lart nëpërmjet shumave të tyre

Camassa dhe Huang treguan fillimisht se shumëkulmoret janë me të vërtetë zgjidhje shpërndarëse. Me të dhënat e përgjithshme fillestare për ekuacionin C-H ne ndërtojmë një varg të multikulmoreve dhe vërtetojmë që ai konvergjon në zgjidhjen egzak të ekuacionit kur numri i kulmoreve rritet në mënyrë të përshtatshme. Vërtetimet shtrihen edhe në rastin periodik. Ne nuk japim vërtetim tani, por konsiderojmë që vërtetimet e dy matematikanëve të lartpërmendur janë konstruktive në kuptimin që ne sigurojmë një metodë eksplicite për të ndërtuar përafrimin shumëkulmor. Kjo jep një argument konstruktiv të egzistencës së zgjidhjeve për ekuacionin Camassa-Holm dhe tregon që shumëkulmoret përfshijnë bashkësinë e zgjidhjeve të paktën në rastin ku e dhëna fillestare përmbush kushtin e përmendur më sipër.

3.2.3 Teorema themelore e egzistencës së zgjidhjes për ekuacionin C-H

Para se të japim një paraqitje preçize të rezultateve kryesore, do të paraqesim përkufizimin e zgjidhjes së dobët për problemin Koshi .

Përkufizim 1. Një funksion i vazhdueshëm $u = u(t, x)$ është një zgjidhje globale e dobët për problemin Koshi (1.2) nëse:

$$u = u(t, x) \in C((0, \infty) \times \Omega) \cap L^\infty(R, H^m(\Omega)) \text{ dhe } \|u\|_{H^m(\Omega)} \leq \|u_0\|_{H^m(\Omega)} \quad \forall t > 0$$

$u(t, x)$ përmbush ekuacionin C-H në kuptimin e shpërndarjeve.

Shënim: $\Omega \subset R^n$, $n \geq 1$, është një bashkësi e kufizuar me kufi të butë $\partial\Omega$.

Teorema 2. Supozojmë se $u_0 \in H^m(\Omega)$. Atëherë problemi Koshi ka një zgjidhje të dobët të pranueshme $u = u(t, x)$ në kuptimin e përkufizimit të mësipërm.

Për më tepër, zgjidhja e dobët $u(t, x)$ për problemin Koshi përfshin vetitë e mëposhtëme:

1) Egziston një konstante pozitive C që varet vetëm nga $\|u_0\|_{H^m(\Omega)}$ e tillë që

$$\partial_x u(t, x) \leq \frac{1}{t} + C \text{ për të gjitha } t > 0$$

2) $P(t, x) \in L^\infty(R^+, H^m(\Omega))$ dhe $\partial_x u(t, x) \in L^p(R^+, H^m(\Omega))$ për çdo $p < 3$ (d.m.th. për çdo $0 < T$, $M < +\infty$, atëherë egziston një konstante pozitive $C_1 = C_1(T, M, p)$ e tillë që

$$\int_0^T \int_{|x| \leq 3} |\partial_x u(t, x)|^p dx dt \leq C_1 \text{ për të gjitha } p < 3$$

3) Supozojmë se $u(t, x)$ është një shenjë, atëherë $u = u(t, x)$ i afrohet pikës zero kur $t \rightarrow \infty$, d.m.th. $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t, x)| = 0$, për të gjitha $x \in \Omega$ ($\Omega \subset R^n$, $n \geq 1$).

Disa Lema dhe vërtetimi i Teoremës 2

Duke supozuar $\varepsilon = 1$ në ekuacionin C-H, ndërtojmë vargun e zgjidhjeve të përafërimit $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t, x)$ si zgjidhje të problemit Koshi, d.m.th

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon + u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon - \gamma \partial_x u_\varepsilon + \partial_x P_\varepsilon = \mu \partial_x^2 u_\varepsilon \\ P_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} \left(\frac{\alpha-1}{2} u_\varepsilon^2 + \frac{3-\beta}{2} (\partial_x u_\varepsilon)^2 + (k + \gamma) u_\varepsilon \right) (t, y) dy \\ u_\varepsilon(0, x) = u_{\varepsilon_0}(t, x) \end{cases} \quad (3.33),$$

Egzistenca, uniciteti dhe vlerësimi i energjisë bazike në vargun e zgjidhjeve të përafërimit jepen në Lemën e mëposhtme:

Lema 3: Le të jetë $\varepsilon > 0$ dhe $u_{\varepsilon_0} \in H^k(\Omega)$ për disa $k \geq 2$. Atëherë egziston një zgjidhje e vetme $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t, x) \in C((0, \infty), H^k(\Omega))$ për problemin Koshi (3.33). Për më tepër, u_ε përmbush

$$\|u_\varepsilon\|_{H^m(\Omega)} \leq \|u_{\varepsilon_0}\|_{H^m(\Omega)} \quad \forall t > 0$$

Lema 4: Le të jetë $u_0 \in H^m(\Omega)$ dhe $u_\varepsilon(t, x)$ zgjidhja për problemin Koshi (3.33). Atëherë egziston një konstante pozitive C që varet vetëm nga $\|u_0\|_{H^m(\Omega)}$, e tillë që

$$\partial_t u_\varepsilon(t, x) \leq \frac{1}{t} + C \quad \text{për të gjitha } t > 0, x \in R$$

Lema 5.: Le të jetë $m = \frac{2k}{2k+1}$ me numra të plotë pozitiv l, k dhe $l \geq k$. Supozojmë se a, b, T janë konstante të fundme të dhëna arbitrarisht me $a < b$ dhe $T > 0$. Atëherë egziston një konstante pozitive $C = C(a, b, T, m, \|u_0\|_{H^m(\Omega)})$ e pavarur nga ε , e tillë që

$$\int_0^T \int_a^b |\partial_t u_\varepsilon(t, x)|^{2+m} dx dt \leq C$$

Fillojmë me kompaktësinë e dobët në $L^\infty(R^+, H^m(\Omega))$. Tani jemi gati të marrim kompaktësinë e nevojshme të zgjidhjes viskoze të përafërt $u_\varepsilon(t, x)$.

Lema 6 : Egziston një nënvarg $\{u_{\varepsilon_j}(t, x), P_{\varepsilon_j}(t, x)\}$ i vargut $\{u_\varepsilon(t, x), P_\varepsilon(t, x)\}$ dhe disa funksione $\{u(t, x), P(t, x)\}$, $u \in L^\infty(R^+, H^m(\Omega))$ dhe $P \in L^\infty(R^+, H^m(\Omega))$, të tilla që $u_{\varepsilon_j} \rightarrow u$ kur $j \rightarrow \infty$ dhe $P_{\varepsilon_j} \rightarrow P$ në $L^q(R^+, H^m(\Omega))$ kur $j \rightarrow \infty$ për të gjitha $1 < q < +\infty$.

Më pas, paraqesim rezultatet më të forta, *d.m.th.* $\partial_t u_\varepsilon(t, x) \rightarrow \partial_t u(t, x)$ në $L^2(R^+, H^m(\Omega))$ ndërsa $\varepsilon \rightarrow 0^+$, e cila garanton se $u(t, x)$ është një zgjidhje e dobët e dëshiruar.

Lema 7 : Le të jetë $u_{t,x}(\lambda)$ masa Young e shoqëruar me $\{q_\varepsilon(t, x)\} = \{\partial_x u_\varepsilon(t, x)\}$.

Atëherë për çdo funksion të vazhdueshëm $f = f(\lambda)$ me $f(\lambda) = O(|\lambda|^r)$ dhe $\partial_\lambda f(\lambda) = O(|\lambda|^{r-1})$ kur $|\lambda| \rightarrow \infty$ dhe $r < 2$ dhe për çdo $\psi \in L_c^s(\Omega)$ me $\frac{1}{s} + \frac{r}{2} = 1$ kemi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(q_\varepsilon(t, x)) \psi(x) dx = \int_{\Omega} \overline{f(q)} \psi(x) dx$$

në mënyrë uniforme në secilin nëngrup kompakt Ω , ku $\overline{f(q)} = \int_{\Omega} f(\lambda) d\eta_{t,x}(\lambda)$

Lema 8 : Le të jetë $u_{t,x}(\lambda)$ masa Young edhe në Lemën 7. Atëherë

$$u_{t,x}(\lambda) = \delta_{\bar{q}(t,x)}(\lambda) \quad \text{për gati të gjitha } (t, x) \in R_+ \times \Omega$$

Vërtetimi i Teoremës

Me gjithë përgatitjen e dhënë, jemi gati për të vërtetuar rezultatet kryesore d.m.th Teoremën 2.

Le të jetë $(u, P)(t, x)$ limiti i zgjidhjeve të përafrimit viskoz $(u_\varepsilon, P_\varepsilon)(t, x)$ kur $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Kjo rrjedh nga Lema 3, 4 dhe 6 që $u \in C([0, \infty) \times R) \cap L^\infty(R^+, H^m(\Omega))$, $P \in L^\infty(R^+, W^{1,\infty}(\Omega))$. Duke marrë $\varepsilon \rightarrow 0^+$ në (3.33), mund të shohim Lemën 6 që $(u, P)(t, x)$ do të jetë një zgjidhje e dobët e pranueshme me kusht që

$$q_\varepsilon \equiv \partial_x u_\varepsilon \rightarrow q = \partial_x u \quad \text{në} \quad L_{loc}^2(R_+ \times \Omega) \quad (3.34)$$

kur $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Megjithatë ai është tani një rrjedhim i thjeshtë i Lemës 8 dhe Lemës 7. Në fakt nga lema 8 rrjedh që egziston një nënvarg i $\{u_\varepsilon(t, x)\}$, ende i vetëpërcaktuar, i tillë që

$$q_\varepsilon \equiv \partial_x u_\varepsilon \rightarrow q = \partial_x u \quad \text{në} \quad L_{loc}^{p_1}(R_+, L_{loc}^{p_2}(\Omega)) \quad \forall p_1 < \infty, \quad p_2 < 2 \quad (3.35)$$

Kjo së bashku me Lemën 5 nënkupton që

$$q_\varepsilon \equiv \partial_x u_\varepsilon \rightarrow q = \partial_x u \quad \text{ne} \quad L_{loc}^p(R_+ \times \Omega) \quad \forall p < 3$$

nga një interpolim i thjeshtë, rrjedh që

$$\partial_x u \in L_{loc}^p(R_+ \times \Omega) \quad \forall p < 3$$

prandaj vlerësimi më i lartë i integrueshmërisë hapësinore në kohë lokale, qëndron.

Hapi i fundit i vërtetimit, është të shqyrtojmë sjelljen asimptotike të zgjidhjes $u(t, x)$. Nga supozimi ynë që $u(t, x)$ është një nga shenjat, do të marrim parasysh vetëm zgjidhjen jo negative. Rasti tjetër është i ngjashëm. Le të jetë $u(t, x) \geq 0$ një zgjidhje e dobët e pranueshme për ekuacionin C-H me $\epsilon = 1$. Atëherë për çdo $t \in R_+$, integrojmë ekuacionin C-H mbi $[0, t] \times (-\infty, x]$ për të marrë

$$\int_{-\infty}^x u(t, y) dy + \frac{1}{2} \int_0^t u^2(s, x) ds - \gamma \int_0^t u(s, x) ds + \int_0^t P(s, x) ds = \int_{-\infty}^x u_0(y) dy \quad (3.36)$$

$$\text{Kemi: } \|u(t, \cdot)\|_{L^1(R)} + \frac{1}{2} \|u(\cdot, x)\|_{L^2(R_+)} - \gamma \|u(\cdot, x)\|_{L^1(R_+)} + \|P(\cdot, x)\|_{L^1(R_+)} \leq \|u_0\|_{L^1(R)} \quad (3.37)$$

Nga ana tjetër, nga vlerësimi standard mbi konvolucionin marrim

$$\|\partial_x P(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C_0 \|u_0\|_{H^1}^2, \text{ e cila tregon se}$$

$$\partial_x u \in L^\infty(R_+, L^2(\Omega))$$

Pra, egziston një nënbashkësi $N \in R$ me masë $(N) = 0$ e tillë që $\partial_x u \in L^\infty(R_+)$ për të gjitha $x \in R \setminus N$. Rrjedh që

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(t, x)| = 0 \quad \text{për } x \in R \setminus N \quad (3.38)$$

Për çdo $x \in N$, egziston një varg $\{x_j\} \in R \setminus N$, i tillë që $x_j \rightarrow x$ kur $j \rightarrow +\infty$. Meqënëse

$$|u(t, x)| \leq |u(t, x_j)| + |u(t, x) - u(t, x_j)| \leq |u(t, x_j)| + C_0 |x - x_j|$$

Arrijmë në përfundimin se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(t, x)| = 0 \quad \text{për } x \in N \quad (3.39)$$

Atëherë *problemi Koshi* ka një zgjidhje të dobët të pranueshme $u = u(t, x)$ në kuptimin e përkufizimit 1 të dhënë që në fillim. Kjo përfundon vërtetimin e Teoremës.

3.3 Aplikimi i problemit të vlerës fillestare në ekuacionin logaritmik të valës

Me $\|\cdot\|_p$ përcaktojmë normën $L^p(\Omega)$, dhe me $\|\nabla \cdot\|$ normën Dirichlet në H_0^m . Në veçanti përcaktojmë $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Gjithashtu përdorim C për të përcaktuar një konstante universale pozitive që mund të ketë vlera të ndryshme në vende të ndryshme. Përcaktojmë me $(\cdot, \cdot)$ prodhimin skalar në $L^2(\Omega)$ dhe me $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dualitetin midis H_0^1 dhe H_0^m .

Përkufizim. Një funksion u në $[0, T]$ quhet një zgjidhje e dobët $u(x, t)$ e problemit C-H në $\Omega \times [0, T)$, nëse $u \in C([0, T], H_0^m(\Omega))$, $u' \in C([0, T], L^2(\Omega))$, $u_0 = u^0(x)$ dhe $u'(0) = u^1(x)$ dhe u përmbush,

$$\langle u''(t), \emptyset \rangle + \langle \nabla u, \nabla \emptyset \rangle + \langle u, \emptyset \rangle + \langle u', \emptyset \rangle - \langle u \log |u|^k, \emptyset \rangle + \langle |u|^k u, \emptyset \rangle = 0 \quad (3.40)$$

Lema 1: (Shih [59]) Supozojmë se $v \in H_0^m(\Omega)$, dhe Ω është një zonë e kufizuar në R^n ($\Omega \subset R^n$). Atëherë, për çdo $a > 0$, ka vend relacioni

$$\int_{\Omega} |v|^2 \log |v| dx \leq \left(\frac{3}{4} \log \frac{4a}{e} \right) \|v\|_2^2 + \frac{a}{4} \|\nabla v\|_2^2 + \|v\|_2^2 \log \|v\|_2 \quad (3.41)$$

Lema 2: (Shih [60]) Supozojmë se $w(t)$ është jonegative, $w(t) \in L^\infty(0, T)$, $w(0) > 0$ dhe

$$w(t) \leq w(0) + a \int_{\Omega} w(s) \log [a + w(s)] ds \quad t \in (0, T), \quad (3.42)$$

ku $a > 1$ është një konstante pozitive. Atëherë kemi

$$w(t) \leq (a + w(0))^{e^{at}} \quad t \in (0, T), \quad (3.43)$$

Lema 3: (shih [53, 55]) (mosbarazimi logaritmik Sobolev) Le të jetë u çdo funksion në $H_0^m(\Omega)$, dhe $a > 0$ të jetë çdo numër. Atëherë

$$2 \int_{\Omega} |u|^2 \ln \frac{|u|}{\|u\|} dx + n(1 + \log a) \|u\|^2 \leq \frac{a^2}{\pi} \int_{\Omega} \left| \frac{1}{2} u \right|^2 dx$$

Teorema kryesore dhe vërtetimi

Do të trajtojmë teoremën kryesore të egzistencës së zgjidhjes globale të dobët. Duke përdorur këto Lema dhe mosbarazimin logaritmik Sobolev me kombinimin e metodës Galerkin për të ndërtuar zgjidhjet e përafërta (shih [84]), ne mund të vërtetojmë teoremën kryesore. Do të realizojmë vërtetimin e Teoremës duke dhënë zgjidhjen u , ku u është një zgjidhje e dobët e problemit C-H në $[0, T)$, ku T është koha maksimale e egzistencës së kohës së zgjidhjes së dobët. Vërtetimi bazohet në metodën Galerkin. Përdorim mosbarazimin logaritmik Sobolev dhe mosbarazimin logaritmik Gronwall.

Teorema 1. Supozojmë se $u^0(x) \in H_0^m(\Omega)$, dhe $u^1(x) \in L^2(\Omega)$. Atëherë, problemi pranon zgjidhjen globale të dobët të përcaktuar në $[0, T]$ për çdo $T > 0$.

Vërtetim: Le të jetë $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ funksioni vetiak i operatorit $A = (\Delta)^m$ me kushtin kufitar zero Dirichlet dhe $D(A) = H_0^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Dihet që $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ formon një bazë ortonormale për $L^2(\Omega)$ dhe për $H_0^1(\Omega)$. Le të jetë P_k projeksioni ortogonal i $L^2(\Omega)$ mbi $V_k =$ shtrirja lineare e $\{w_1, \dots, w_k\}$, $k \geq 1$. Le të jetë $u_k = \sum_{j=1}^k g_{k_j}(t) w_j$ një zgjidhje e përafërt për (1.2) në V_k .

Atëherë $u_k(t)$ verifikon sistemin e mëposhtëm të ODE-se.

$$\begin{aligned} & \langle u''_k(t), w_j \rangle + (\nabla u_k(t), \nabla w_j) + (u_k, w_j) + (u'_k(t), w_j) \\ & - (u_k \log |u_k|^2, w_j) + (|u_k|^2 u_k, w_j) = 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$u_k(0) = P_k u^0(x), \quad u'_k(0) = P_k u^1(x) \quad (3.45)$$

për $j = 1, \dots, k$. Më specififikisht,

$$u_k(0) = \sum_{j=1}^k u_{k_j}(0) w_j, \quad u'_k(0) = \sum_{j=1}^k u'_{k_j}(0) w_j$$

$$\text{ku,} \quad u_{k_j}(0) = (u^0, w_j), \quad u'_{k_j}(0) = (u^1, w_j), \quad j = 1, \dots, k$$

Siç duket, $u_k(0) \rightarrow u^0$ fuqimisht në $H_0^m(\Omega)$, $u'_k(0) \rightarrow u^1$ fuqimisht në $L^2(\Omega)$ kur $k \rightarrow \infty$. Duke përdorur teoremën Koshi-Peano, dimë që sistemi (3.44)-(3.46) pranon një zgjidhje $g_{k_j}(t) \in C^2[0, T_k]$ për çdo $k \geq 1$ dhe disa $T_k > 0$.

Kështu mund të marrim një zgjidhje të përafërt $u_k(t)$ të problemit mbi $[0, T_k]$. Tani do të përpiqemi të marrim vlerësimin apriori për zgjidhjet e përafërta $u_k(t)$ të problemit. Duke shumëzuar (3.44) me $g'_{k_j}(t)$ dhe duke i përmbledhur në lidhje me j nga 1 në k , kemi

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|u'_k(t)\|_2^2 + \|u_k(t)\|_2^2 - \int_{\Omega} |u_k(t)|^2 \log |u_k(t)| dx + \frac{1}{4} \|u_k(t)\|_4^4 \right] + \|u'_k(t)\|_2^2 \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Duke integruar (3.46) mbi $(0, t)$, $0 < t \leq T_k$, marrim

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|u'_k(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_k(t)\|_2^2 + \|u_k(t)\|_2^2 - \int_{\Omega} |u_k(t)|^2 \log|u_k(t)| dx + \frac{1}{4} \|u_k(t)\|_4^4 \\
& + \int_0^t \|u'_k(s)\|_2^2 ds \\
& = \frac{1}{2} \|u'_k(0)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_k(0)\|_2^2 + \|u_k(0)\|_2^2 - \int_{\Omega} |u_k(0)|^2 \log|u_k(0)| dx \\
& + \frac{1}{4} \|u_k(0)\|_4^4 + \int_0^t \|u'_k(s)\|_2^2 ds \\
& \leq C_0 \\
& - \int_{\Omega} |u_k(0)|^2 \log|u_k(0)| dx
\end{aligned} \tag{3.47}$$

ku $C_0 = C(\|u^0\|_{H^m(\Omega)}, \|u^1\|_{L^2(\Omega)})$ është një konstante pozitive.

Për të trajtuar termin e fundit në (3.47), ne përdorim mosbarazimin elementar

$$|t^2 \log t| \leq C(1 + t^3) \quad \text{për të gjitha } t > 0 \tag{3.48}$$

ku C është konstante pozitive. Nga (3.48) kemi si më poshtë

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} |u_k(0)|^2 \log|u_k(0)| dx \leq C|\Omega| + C \int_{\Omega} |u_k(0)|^3 dx \leq C(1 + \|u_k(0)\|_{H^m(\Omega)}^3) \\
& \leq C(+\|u^0\|_{H^m(\Omega)}^3)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Nga (3.47) dhe (3.49) kemi

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|u'_k(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_k(t)\|_2^2 + \|u_k(t)\|_2^2 + \frac{1}{4} \|u_k(t)\|_4^4 + \int_0^t \|u'_k(s)\|_2^2 ds \\
& \leq C \int_{\Omega} |u_k(t)|^2 \log|u_k(t)| dx
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Duke përdorur Lemën 1 dhe mosbarazimin Gross-Sobolev kemi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_k(t)|^2 \log |u_k(t)| dx &\leq \left(\frac{3}{4} \log \frac{4a}{e} \right) \|u_k(t)\|_2^2 + \frac{a}{4} \|\nabla u_k(t)\|_2^2 \\ &+ \|u_k(t)\|_2^2 \log \|u_k(t)\|_2 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Nga (3.50) dhe (3.51), kemi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u'_k(t)\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{4} \right) \|\nabla u_k(t)\|_2^2 + \left(1 - \frac{3}{4} \log \frac{4a}{e} \right) \|u_k(t)\|_2^2 + \frac{1}{4} \|u_k(t)\|_4^4 \\ + \int_0^t \|u'_k(s)\|_2^2 ds \leq C + \|u_k(t)\|_2^2 \log \|u_k(t)\|_2 \end{aligned} \quad (3.52)$$

Në (3.52) marrim $a = \frac{1}{4}$ dhe kemi

$$\begin{aligned} \|u'_k(t)\|_2^2 + \|\nabla u_k(t)\|_2^2 + \|u_k(t)\|_2^2 + \|u_k(t)\|_4^4 \\ \leq C(1 + \|u_k(t)\|_2^2 \log \|u_k(t)\|_2) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Vërejmë se $u_k(t) = u_k(0) + \int_0^t u'_k(s) ds$, dhe kemi

$$\begin{aligned} \|u_k(t)\|_2^2 &\leq 2(\|u_k(0)\|_2^2 + 2T \int_0^t \|u'_k(s)\|_2^2 ds) \\ &\leq 2(\|u_k(0)\|_2^2 + \max\{1, 2T\} \frac{1+C}{C} \int_0^t \|u'_k(s)\|_2^2 ds) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Nga (3.53) dhe (3.54) kemi

$$\|u_k(t)\|_2^2 \leq A + B \int_0^t \|u_k(s)\|_2^2 \log \|u_k(s)\|_2 ds \quad (3.55)$$

ku $A = \|u_k(0)\|_2^2 + \max\{1, 2T\}$ dhe $B = \max\{1, 2T\}(1+C)$. Duke marrë $B \geq 1$ dhe përdorur mosbarazimin Gronwall në Lemën 2 marrim

$$\|u_k(t)\|_2^2 \leq A + B \int_0^t \|u_k(s)\|_2^2 \log \|u_k(s)\|_2 ds$$

$$\|u_k(t)\|_2^2 \leq (A + B)e^{Bt} \leq C_T \quad (3.56)$$

Nga (3.53) dhe (3.56) marrim

$$\|u'_k(t)\|_2^2 + \|\nabla u_k(t)\|_2^2 + \|u_k(t)\|_2^2 + \|u_k(t)\|_4^4 \leq C_T \quad (3.57)$$

Shënojmë që u_k është e kufizuar në mënyrë uniforme në $L^\infty(0, T, H_0^m(\Omega))$, u'_k është e kufizuar në mënyrë uniforme në $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$, u''_k është e kufizuar në mënyrë uniforme në $L^\infty(0, T, H_0^{-m}(\Omega))$. Nga këto referime dhe duke përdorur (3.57), egziston një nënvarg $\{u_k\}$, i tillë që kushtet e mëposhtëme:

$$\begin{aligned} u_k &\rightarrow u && \text{në } L^\infty(0, T, H_0^m(\Omega)) \\ u'_k &\rightarrow u' && \text{në } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\ u''_k &\rightarrow u'' && \text{në } L^\infty(0, T, H_0^{-m}(\Omega)) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Bazuar në sa më sipër kemi

$$u_k \rightarrow u \quad \text{në } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \quad (3.59)$$

Që do të thotë:

$$\begin{aligned} u_k &\rightarrow u && \text{në } (0, T) \times \Omega \\ u_k \log |u_k|^2 &\rightarrow u \log |u|^2 && \text{në } (0, T) \times \Omega \\ |u_k|^2 u_k &\rightarrow |u|^2 u && \text{në } (0, T) \times \Omega \end{aligned} \quad (3.60)$$

Le të përdorim përsëri (3.48) për të vlerësuar termin logaritmik

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_k \log |u_k|^2|^2 dx &= 4 \int_{\Omega} |u_k|^2 (\log |u_k|^2)^2 dx \leq C|\Omega| + C \int_{\Omega} |u_k|^2 dx \\ &\leq C|\Omega| (\|u_k(s)\|_{H_0^m}^6 + 1) \leq C \end{aligned} \quad (3.61)$$

Kjo nënkupton që $u_k \log |u_k|^2$ është e kufizuar në mënyrë uniforme në $L^2(0, T, L^2(\Omega))$. Kështu, egziston çdo funksion në $L^2(0, T, L^2(\Omega))$, i tillë që $|u_k|^2 u_k$ konvergjon në të. Ky është $u \log |u|^2$. Kështu,

$$u_k \log |u_k|^2 \rightarrow u \log |u|^2 \quad \text{në } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \quad (3.62)$$

Nga mosbarazimi Sobolev

$$\int_{\Omega} ||u_k|^2 u_k|^2 dx = \int_{\Omega} |u_k|^6 \leq C \|u_k(s)\|_{H_0^m}^6 \leq C \quad (3.63)$$

Siç kemi spjeguar më sipër egziston një $|u|^2 u$ nën $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ i tillë që

$$|u_k|^2 u_k \rightarrow |u|^2 u \quad \text{në } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \quad (3.64)$$

Duke përdorur (3.61), (3.62), (3.63) në (3.64) dhe duke shkuar në limit në (3.64) dhe meqënëse $\{u_k\}_{j=1}^{\infty}$ është e dendur në $H_0^m(\Omega)$ marrim

$$\begin{aligned} & \langle u'', w \rangle + (\nabla u, \nabla v) + (u, w_j) + (u', v) - (u \log |u|^2, v) + (|u|^2 u, v) \\ & = 0 \quad \forall v \in H_0^m(\Omega) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Kjo qartësisht do të thotë që u përmbush ekuacionin C-H në kuptimin e dobët.

Nga (3.58) kemi $u_k(0) \rightarrow u(0)$ në $L^2(\Omega)$. Duke përdorur ekuacionin (3.59) dhe duke zgjedhur $u_k(0) \rightarrow u^0$ në $H_0^m(\Omega)$, kemi:

$$u(0) = u^0 \quad (3.66)$$

Nga (3.59), $\langle u''_k, w_j \rangle \rightarrow \langle u, w_j \rangle$ në $L^\infty(0, T)$. Kjo nënkupton që $\langle u'_k(0), w_j \rangle \rightarrow \langle u'(0), w_j \rangle$. Shënojmë që $u'_k(0) \rightarrow u^1$ në L^2 , atëherë

$$u'(0) = u^1 \quad (3.67)$$

Nga (3.61) dhe (3.62), kushti fillestar është përmbushur. Teorema (1) është përfunduar. Egzistenca globale e zgjidhjeve për problemin C-H u vërtetua përfundimisht.

3.4 Energjia e valës ujore në koordinatat Lagranzhiane

Riformulojmë ekuacionin C-H duke përdorur një grup të ndryshëm variablash dhe përftojmë një sistem gjysmëlinear të ekuacioneve diferenciale të zakonshme si Bressan dhe Constantin [1].

Megjithatë, variablat e dallueshme thjesht korrespondojnë me transformimin midis koordinatave Eulerian dhe Lagranzhian.

Le të përcaktojmë $u = u(t, x)$ zgjidhjen dhe $y(t, \xi)$ karakteristikat koresponduese, pra $y_t(t, \xi) = u(t, y(t, \xi))$. Variablat tanë të rinj janë $y(t, \xi)$,

$$U(t, \xi) = u(t, y(t, \xi)), \quad H(t, \xi) = \int_{-\infty}^{y(t, \xi)} (u^2 + u_x^2) dx \quad (3.68)$$

ku U korespondon me shpejtësinë Lagranzhian ndërsa H mund të interpretohet si shpërndarja Langrazhiane e energjisë kumulative. Karakteristikat $q(\xi; t)$ janë përcaktuar si zgjidhjet e ekuacionit

$$q_t(\xi; t) = m(q(\xi; t), t)$$

me kushtin fillestar $q(\xi; t) = \xi$. Le të konsiderojmë momentin $m = u - u_{xx}$ të sistemit dhe paraqesim variablin p të lidhur direkt me momentin, si

$$p(\xi; t) = m(q(\xi; t), \frac{\partial q}{\partial \xi}(\xi; t)),$$

Camassa paraqet sistemin e mëposhtëm të ekuacioneve diferenciale me derivate të pjesshme

$$q_t(\xi; t) = \frac{1}{2} \int_R \exp(-|q(\xi; t) - q(\mu; t)|) p(\mu; t) d\mu$$

$$q_t(\xi; t) = \frac{1}{2} \int_R \operatorname{sgn}(\xi - \mu) \exp(-|q(\xi; t) - q(\mu; t)|) p(\mu; t) d\mu$$

Për më tepër, le të jetë

$$P(\xi; t) = \frac{1}{2} \int_R \exp(-|q(\xi; t) - q(\mu; t)|) (U^2 y_\xi + H_\xi) d\mu$$

$$Q(\xi; t) = \frac{1}{2} \int_R \operatorname{sgn}(\xi - \mu) \exp(-|q(\xi; t) - q(\mu; t)|) (U^2 y_\xi + H_\xi) d\mu$$

Atëherë, mund të paraqesim sistemin e mëposhtëm

$$\begin{cases} y_t = U \\ U_t = -Q \\ H_t = U^3 - 2PU \end{cases} \quad (3.69)$$

që është ekuivalent me ekuacionin Camassa-Holm.

Egzistenca globale e zgjidhjeve të (3.69) është marrë duke filluar nga një argument i tkurrjes. Siç vihet re në [1], edhe nëse $H^1(R)$ është një hapësirë natyrale për ekuacionin, nuk ka shpresë për të marrë një grup të zgjidhjeve vetëm duke konsideruar $H^1(R)$. Pra, paraqesim hapësirën e mëposhtme D , e cila karakterizon zgjidhjet në koordinatat Euleriane.

Përkufizim 1. Bashkësia D përbëhet nga të gjitha çiftet (u, μ) të tilla që u i përket $H^1(R)$ dhe μ është një masë e fundme pozitive Radon, pjesa absolute e vazhdueshme e të cilës, kënaq $\mu_{ac} = (u^2 + u_x^2) dx$.

Për një ξ të dhënë, mund të shihet gjithashtu si një pozicion i një grimce që evolon në fushën e shpejtësisë u , ku u është zgjidhja e ekuacionit Camassa-Holm. Më pas punojmë në koordinatat Lagranzhian.

Çiftet (u, μ) të tillë që $(u, \mu) \in D$ nëse $u \in H^1(R)$ dhe μ është një masë pozitive Radon pjesa absolute e vazhdueshme e të cilës, përmbush $\mu_{ac} = (u^2 + u_x^2) dx$. Me tre variabla Lagranzhian (y, U, H) përballë dy variablave Eulerian (u, μ) , përcaktojmë një grup të transformimeve i cili vepron mbi variablat Lagranzhian dhe lë invariant sistemin e ekuacioneve (3.69). Duke përdorur këtë grup, jemi në gjendje të krijojmë një bijeksion midis hapësirës së variablave Eulerian dhe hapësirës së variablave Lagranzhian kur identifikojmë variablat që janë invariant. Ky bijeksion na lejon të trasferojmë rezultatet e marra në strukturën Langrazhian brenda strukturës Eulerian.

Në veçanti, dhe kjo zëvendëson rezultatin kryesor të kësaj pjese, marrim një metrikë d_D metrike në D dhe një gjysëm grup të vazhdueshëm të zgjidhjeve në (D, d_D) . Distanca e d_D jep strukturën D të një hapësire të plotë metrike. Kjo metrikë krahasohet me disa topologji me standarte dhe ne marrim që konvergjenca në $H^1(R)$ përfshin konvergjencën në (D, d_D) e cila në vetëvete nënkupton konvergjencën në $L^\infty(R)$. Rezultati ynë kryesor thotë se për të dhënat fillestare të dhëna në D egziston një zgjidhje e dobët unike e ekuacionit Camassa-Holm. Masa e ndërlidhur $\mu(t)$ ka një masë totale konstante, d.m.th, $\mu(t)(R) = \mu(0)(R)$ për të gjitha t , e cila korespondon me energjinë totale të sistemit. Kjo është arsyeja pse zgjidhjet tona janë quajtur konservative.

Metoda e përshkruar mund të studiohet në detaje për shumëkulmoret, shih [65]. Duke modifikuar në mënyrë të përshtatshme teknikat e përshkruara në këtë punim, rezultatet mund të shtrihen për të treguar ekzistencën globale të zgjidhjeve konservative për ekuacionin e përgjithësuar.

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x + P_x = U \\ P - P_{xx} = g(U) + \frac{1}{2} f''(u) u_x^2 \end{cases} \quad (3.70)$$

ku $f, g \in L^\infty(R)$. Vërejmë se nëse $g(u) = ku + u^2$ dhe $f(u) = ku + \frac{u^2}{2}$, atëherë (3.70) është ekuacioni klasik Camassa-Holm (1.1). Shih [70] për një vërtetim të fundëm të egzistencës së zgjidhjeve shpërndarëse të (3.70). Për më tepër, metoda e prezantuar në këtë punim mund të përdoret për të nxjerrë metodat numerike që konvergjojnë në zgjidhje konservative.

- Zgjidhjet Globale në koordinatat Lagranzhiane

Duke supozuar se u është e butë, nuk është e vështirë të kontrollohet që

$$(u^2 + u_x^2)_t + (u(u^2 + u_x^2))_x = (u^3 - 2Pu)_x \quad (3.71)$$

Le të paraqesim karakteristikat $y(t; \xi)$ të përcaktuara si zgjidhje të

$$u_t(t; \xi) = u(t, y(t, \xi)) \quad (3.72)$$

për një $y(0; \xi)$ të dhënë. Ekuacioni (3.71) na jep informacion rreth evolucionit të sasisë së energjisë që përfshihet midis dy karakteristikave. Jepen ξ_1, ξ_2 në R , le të jetë $H(t) = \int_{y(t, \xi_1)}^{y(t, \xi_2)} (u^2 + u_x^2) dx$ energjia e përfshirë midis dy vijave karakteristike $y(t, \xi_1)$ dhe $y(t, \xi_2)$.

Më pas duke përdorur (2.1) dhe (2.2), marrim

$$\frac{dH}{dt} = ((u^3 - 2Pu) \circ y)|_{\xi_1}^{\xi_2} \quad (3.73)$$

Zgjidhjet e Camassa-Holm dalin në pah kur karakteristikat që dalin nga pika të ndryshme bien ndesh. Është e rëndësishme të vërehet se ne nuk marrim përplasje pasi Camassa-Holm ruan normën H^1 dhe prandaj zgjidhjet mbeten të vazhdueshme. Megjithatë, nuk është e qartë se si të vazhdohet zgjidhja pas kohës së përplasjes. Rezulton se, kur dy karakteristika bien ndesh, energjia që përmbajne këto dy karakteristika ka një kufi që mund të llogaritet nga (3.73). Siç do ta shohim, njohja e kësaj energjie na mundëson të zgjasim karakteristikat dhe në këtë mënyrë zgjidhjen, pas përplasjeve.

Derivojmë një sistem ekuivalent me ekuacionet më lart. Të gjitha derivimet në këtë paragraf janë formale. Le të jetë y që përcakton karakteristikat. Paraqesim dy variabla të tjerë, shpejtësia Lagranzhiane dhe shpërndarja e energjisë kumulative, U dhe H , të përcaktuara si $U(t, \xi) = u(t, y(t, \xi))$ dhe

$$H(t) = \int_{-\infty}^{y(t, \xi)} (u^2 + u_x^2) dx \quad (3.74)$$

Nga përkufizimi i karakteristikave, rrjedh që

$$U_t(t; \xi) = u_t(t, y) + y_t(t, \xi)u_x(t, y) = -P_x \circ y(t, \xi) \quad (3.75)$$

Ky term i fundit mund të shprehet në mënyrë unike në terma të U, y , dhe H . Marrim shprehjen e mëposhteme eksplicite për ,

$$P(\xi, t) = \frac{1}{2} \int_R e^{|x-z|} \left(u^2(t, z) + \frac{1}{2} u_x^2(t, z) \right) dz \quad (3.76)$$

Pra kemi

$$P_x \circ y(t, \xi) = -\frac{1}{2} \int_R \operatorname{sgn}(y(t, \xi) - z) e^{-|y(t, \xi) - z|} \left(u^2(t, z) + \frac{1}{2} u_x^2(t, z) \right) dz$$

Meqënëse $H_\xi = (u^2 + u_x^2) \circ y y_\xi$

$$P_x \circ y(t, \xi) = -\frac{1}{4} \int_R \operatorname{sgn}(y(\xi) - y(\mu)) \exp(-|y(\xi) - y(\mu)|) (U^2 y_\xi + H_\xi) \mu d\mu \quad (3.77)$$

ku variabli t është hedhur për të lehtësuar shënimin. Më vonë do të provojmë që y është një funksion rritës për çdo fushë fikse t . Nëse për momentin e marrim këtë për të dhënë, atëherë $P_x \circ y$ është ekuivalente me Q ku

$$Q(t, \xi) = -\frac{1}{4} \int_R \operatorname{sgn}(\xi - \mu) \exp(-\operatorname{sgn}(\xi - \mu)(y(\xi) - y(\mu))) (U^2 y_\xi + H_\xi) \mu d\mu \quad (3.78)$$

$$P(t, \xi) = -\frac{1}{4} \int_R \exp(-\operatorname{sgn}(\xi - \mu)(y(\xi) - y(\mu))) (U^2 y_\xi + H_\xi) \mu d\mu \quad (3.79)$$

Pra $P_x \circ y$ dhe $P \circ y$ mund të zëvendësohen me shprehje ekuivalente të dhëna nga (3.78) dhe (3.79) të cilat varen vetëm nga variablat tanë të rinj U, H , dhe y . Paraqesim një tjetër variabël, $\zeta(t; \xi)$, i përcaktuar thjesht si $\zeta(t, \xi) = y(t, \xi) - \xi$. Do të rezultojë që $\zeta \in L^\infty(R)$. Tani marrim një sistem të ri të ekuacioneve, formalisht ekuivalent me ekuacionin Camassa-Holm. Ekuacionet (3.75), (3.73) japin

$$\begin{cases} \zeta_t = U \\ U_t = -Q \\ H_t = U^3 - 2PU \end{cases} \quad (3.80)$$

Sistemi (3.80) i ekuacioneve diferenciale të zakonshme për (ζ, U, H) nga $[0; T]$ tek E është i zotëruar, ku E është hapësirë Banach. Kemi

$$Q_\xi = -\frac{1}{2} H_\xi - \left(\frac{1}{2} U^2 - P \right) y_\xi \quad \text{dhe} \quad P_\xi = Q y_\xi \quad (3.81)$$

Pra, duke diferencuar (3.80) marrim

$$\begin{cases} \zeta_{\xi t} = U_\xi \quad (\text{or } y_{\xi t} = U_\xi) \\ U_{\xi t} = \frac{1}{2} H_\xi - \left(\frac{1}{2} U^2 - P \right) y_\xi \\ H_{\xi t} = -2QU y_\xi + (3U^2 - 2P) U_\xi \end{cases} \quad (3.82)$$

Sistemi (3.82) është gjysmëlinear në lidhje me variablat y_ξ, U_ξ dhe H_ξ .

- *Egzistenca dhe uniciteti i zgjidhjeve të sistemit ekuivalent*

Përqendrojmë vëmendjen tonë në sistemin e ekuacioneve (3.80) dhe vërtetojmë nga një argument i turrjes, që ai pranon një zgjidhje unike. Le të jetë V hapësira Banach e përcaktuar nga

$$V = \{f \in C_b(R) \mid f_\xi \in L^2(R)\}$$

ku $C_b(R) = C(R) \cap L^2(R)$ dhe norma e V jepet nga $\|f\|_V = \|f\|_{L^\infty(R)} + \|f\|_{L^2(R)}$. Sigurisht $H^1(R) \subset V$ por diskutimi nuk është i vërtetë pasi V përmban funksione që nuk zhduken në pafundësi. Do të përdorim hapësirën Banach E të përcaktuar nga $E = V \times H^1(R) \times V$

Për çdo $X = (\zeta, U, H) \in E$, norma në E jepet nga $\|X\|_E = \|\zeta\|_V + \|U\|_{H^1(R)} + \|H\|_V$

Lema e mëposhtme jep kufijtë Lipschitz që na nevojiten në Q dhe P .

Lema 1. Për çdo $X = (\zeta, U, H) \in E$, përcaktojmë pasqyrimet Q dhe P si $Q(X) = Q$ dhe $P(X) = P$ ku Q dhe P jepen respektivisht nga (3.78) dhe (3.79). Atëherë, P dhe Q janë pasqyrimet Lipschitz në bashkësitë e kufizuara nga E në $H^1(R)$.

Për më tepër kemi

$$Q_\xi = -\frac{1}{2}H_\xi - \left(\frac{1}{2}U^2 - P\right)(1 + \zeta_\xi) \quad \text{dhe} \quad P_\xi = Q(1 + \zeta_\xi) \quad (3.83)$$

Le të jenë $R_1 : E \rightarrow V$ dhe $R_2 : E \rightarrow H^1(R)$, dy pasqyrime B-Lipschitz. Atëherë, produkti $X \rightarrow R_1(X)R_2(X)$ është gjithashtu një pasqyrim B-Lipschitz nga E në $H^1(R)$, ose nga E në V . Meqënëse pasqyrimi $X \rightarrow e^\zeta$ është B-Lipschitz nga E në V , atëherë Q_1 është produkt i dy pasqyrimeve B-Lipschitz, një nga E në $H^1(R)$ dhe tjetra nga E në V , ajo është një pasqyrim B-Lipschitz nga E në $H^1(R)$. Në mënyrë të ngjashme provohet që Q_2 është B-Lipschitz dhe prandaj Q është B-Lipschitz. Gjithashtu, P është B-Lipschitz. Formulat (3.83) janë marrë nga njehsime direkte duke përdorur rregullat e prodhimit, shih [65].

Në teoremën tjetër do të provojmë egzistencën e zgjidhjes për sistemin (3.80) duke përdorur një argument turrjeje.

Teorema 2. Jepet $\bar{X} = (\bar{\zeta}, \bar{U}, \bar{H})$ në E , atëherë egziston një kohë T që varet vetëm nga $\|\bar{X}\|_E$ e tillë që sistemi (3.80) pranon një zgjidhje unike në $C^1([0; T], E)$ me të dhënë fillestare $\bar{X}$.

Lema 3 Jepet kushti fillestar $\bar{X} = (\bar{U}; \bar{H}; \bar{\zeta}) \in E \cap [W^{1,\infty}(R)]^3$, konsiderojmë zgjidhjen $X = (\zeta; U; H) \in C^1([0; T]; E)$ të (3.31) dhënë nga Teorema 2. Atëherë, $X \in C^1([0; T], E \cap [W^{1,\infty}(R)]^3$.

Pra, kjo lemë na lejon të marrim një përfaqësues të posaçëm për $(\zeta_\xi, U_\xi, H_\xi)$ të dhënë nga (α, β, γ) , e cila është e përcaktuar për të gjitha $\xi \in R$ dhe e cila, për çdo ξ të dhënë përmbush ekuacionin diferencial të zakonshëm (3.75).

Lema 4. Le të jetë R një operator linear i kufizuar në hapësirën Banach X , brenda një hapësire Banach. Le të jetë f në $C([0, T]; X)$. Atëherë, Rf i përket $C([0, T], Y)$ -së dhe prandaj është e integrueshme sipas Riemann, dhe

$$\int_{[0, T]} Rf(t) dt = R \int_{[0, T]} f(t) dt = Rf(t) dt$$

Përkufizim 5. Bashkësia G përbëhet nga të gjithë $(\zeta; U; H) \in E$ e tillë që

$$(\zeta; U; H) \in [W^{1, \infty}(R)]^3$$

$$y_\xi \geq 0; H_\xi \geq 0; y_\xi + H_\xi > 0 \text{ pothuajse kudo, dhe } \lim_{\xi \rightarrow 1} H(\xi) = 0$$

$$y_\xi H_\xi = y_\xi^2 U^2 + U_\xi^2 \text{ pothuajse kudo}$$

$$\text{ku përcaktojmë } y(\xi) = \zeta(\xi) + \xi.$$

Shënojmë se nëse të gjithë funksionet janë të butë dhe $y_\xi > 0$, për të dhënë fillestare në G , zgjidhja e (2.10) egziston globalisht.

Vertetimi i Teoremes 2: Fillimisht, rishkruajmë zgjidhjen si më poshtë,

$$X(t) = \bar{X} + \int_0^t F(X(\mu)) d\mu \quad (3.84)$$

ku $F: E \rightarrow E$ jepet nga $F(X) = (U, -Q(X), U^3 - 2P(X)U)$ ku $X = (\zeta, U, H)$. Integralet janë përcaktuar si integrale Riemann të funksioneve të vazhdueshme në hapësirën Banach E . Duke përdorur Lemën 1, mund të kontrollojmë që çdo komponent i $F(X)$ është produkt i funksioneve që përmbush një nga supozimet e Lemës 3 dhe duke përdorur të njëjtën lemë, marrim që $F(X)$ është një funksion Lipchitz në çdo bashkësi të kufizuar të E . Meqënëse E është një hapësirë Banach, përdorim argumentin standart të tkurjes për të vërtetuar këtë teoremë.

Tani kthehemi në vërtetimin e ekzistencës së zgjidhjeve globale të (3.80). Jemi të interesuar në një klasë të caktuar të të dhënave fillestare. Në veçanti do të konsiderojmë të dhënat fillestare që u përkasin $E \cap [W^{1, \infty}(R)]^3$ ku $W^{1, \infty}(R) = \{f \in C_b(R) \mid f_\xi \in L^\infty(R)\}$.

Jepet $(\bar{\zeta}, \bar{U}, \bar{H}) \in E \cap [W^{1, \infty}(R)]^3$, konsiderojmë zgjidhjen e kohës së shkurtër $(\zeta, U, H) \in C([0, T], E)$ të (3.80) dhënë nga Teorema 2. Duke përdorur faktin që Q dhe P janë Lipschitz në bashkësitë e kufizuara (Lema 1) dhe, meqënëse $X \in C([0, T], E)$, mund të provojmë që P dhe Q i përkasin $C([0, T], H^1(R))$.

Konsiderojmë tani U, P dhe Q si funksione të dhënë në $C([0, T], H^1(\mathbb{R}))$. Atëherë, për çdo $\xi \in \mathbb{R}$ të fiksuar, mund të zgjidhim sistemin e ekuacioneve diferenciale të zakonshme.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \alpha(t, \xi) = \beta(t, \xi) \\ \frac{d}{dt} \beta(t, \xi) = \frac{1}{2} \gamma(t, \xi) + \left(\left(\frac{1}{2} U^2 - P \right)(t, \xi) \right) (1 + \alpha(t, \xi)) \\ \frac{d}{dt} \gamma(t, \xi) = -((2QU)(t, \xi))(1 + \alpha(t, \xi)) + ((3U^2 - 2P)(t, \xi))\beta(t, \xi) \end{cases} \quad (3.85)$$

e cila përftohet duke zëvendësuar ζ_ξ, U_ξ dhe H_ξ në (5.2.12) respektivisht me të panjohurat α, β dhe γ .

Kapitulli IV

PËRAFRIME TË ZGJIDHJES, APLIKIMI DHE REZULTATET NUMERIKE

4.1 Metodat Numerike

Disa probleme praktike kanë nevojë për metodat numerike. Metoda e volumit të fundëm dhe metoda e elementeve të fundme janë dy teknikat kryesore të përdorura për të simuluar rrjedhën e ujit të cekët. Kjo klasë e ekuacioneve mund të përdoret për të modeluar një varg të rrjedhave, por është më e vështirë për t'u zgjidhur sesa ekuacionet e valës së ujit të cekët. Një përshkrim mbi metodat numerike të përdorura është dhënë tek [83].

Metoda e Volumit të Fundëm.

Metoda e volumit të fundëm bazohet në formën integrale të ligjit të ruajtjes.

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx + f(q(x_2, t)) - f(q(x_1, t)) = 0$$

Në punimin [87] jepet një tablo e përmblodhur e kësaj metode lidhur me përcaktimin e përafrimit të zgjidhjeve në ekuacionin e valës ujore.

Kjo metodë na lejon të shqyrtojmë ekuacionin e plotë të valës ujore si një ekuacion eliptik në një plan horizontal që kërkon zgjidhje. Merret si model për ekuacionet e rendit të lartë në hapësirën Hamiltoniane që përshkruhet me ekuacionin e Laplasit, i përshtatur në bashkësinë e brendshme fluide të valëve ujore [92].

Metoda Runge-Kutta

Një skemë e metodës Runge–Kutta është zhvilluar për ekuacione jolineare dydimensionale të ujit të cekët në formën e konvergjencës së fluksit.

Le të japim një formulim të skemes në një formë të vazhdueshme të hapësirës [32].

Shqyrtojmë ekuacionin e tendencës gjenerike : $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(\varphi)$. Këtu φ është një variabël arbitrar që është një funksion i hapësirës dhe kohës. RK3 eksplicite, skema e diferencës së kohës për ekuacionin e mësipërm shprehet si më poshtë:

$$\varphi^{(1)} = \varphi^n + \frac{\Delta t}{3} F^n ; \varphi^{(2)} = \varphi^n + \frac{\Delta t}{2} F^{(1)} ; \varphi^{n+1} = \varphi^n + \Delta t F^{(2)}$$

ku $F^1 = F(\varphi^1)$ dhe $F^2 = F(\varphi^2)$. Këtu indekset e sipërme n dhe $n + 1$ përcaktojnë treguesit e nivelit kohë, ndërsa t është hapi i kohës. Kjo formë e veçantë e skemës së saktë Runge-Kutta është adoptuar gjithashtu nga Wicker dhe Skamarock në 2002.

Ekuacionet jo lineare 2D të valës së ujit të cekët në koordinata karteziene (x, y) mund të shprehen në një formë të konvergjencës së fluksit.

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= fV - \left(\frac{\partial}{\partial x}(Uu) + \left(\frac{\partial}{\partial y}(Uv) - g\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\tau^2\right) + \tau F_x\right.\right. \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= -fU - \left(\frac{\partial}{\partial x}(Vu) + \left(\frac{\partial}{\partial y}(Vv) - g\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\tau^2\right) + \tau F_y\right.\right. \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} &= -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + S\end{aligned}$$

Këtu, u dhe v përcaktojnë komponentët e shpejtësisë në drejtimet, përkatësisht, x dhe y dhe τ përcakton thellësinë e sipërfaqes së lirë; F_x dhe F_y përcaktojnë fërkimin në drejtimet, përkatësisht x dhe y , dhe S përcakton burimin e masës. Për linearizimin gjysëm të pashtjelluar të ekuacioneve të vales së ujit të cekët, shprehim thellësinë e sipërfaqes së lirë si $\tau = H + h$, ku H dhe h përcaktojnë thellësinë kryesore të shtresës së cekët dhe thellësinë e turbullimit të sipërfaqes së lirë nga H .

Analiza FEM (metodat e elementëve të fundëm) për problemet e modelit 1D

Për problemin e modelit të thjeshtë 1D

$$-u'' = f, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

Dimë që forma e dobët është:

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx \quad \text{ose} \quad (u', u') = (f, v)$$

Meqënëse v është arbitrare, mund të marrim $v = f$ ose $v = u$, atëherë kemi

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 u'^2 dx, \quad \int_0^1 f v dx = \int_0^1 f^2 dx.$$

Kështu të gjitha u, u', f, v, v' duhet t'i përkasin $L^2(0, 1)$. Kjo do të thotë që $u \in H^1(0, 1)$ dhe $v \in H^1(0, 1)$. Kështu zgjidhja është në hapësirën Sobolev $H^1(0, 1)$ dhe duhet të marrim gjithashtu v në të njëjtën hapësirë. Nga Teorema e përfshirjes Sobolev, dime gjithashtu që $H^1 \subset C^0$, e cila do të thotë që zgjidhja është e vazhdueshme.

Metodat e konformitetit të elementëve të fundëm

Përkufizim: Nëse hapësira e elementëve të fundme është një nënhapësirë e hapësirës së zgjidhjes, atëherë metoda e elementëve të fundme quhet hapësirë e fundme e konformitetit.

Për shembull, funksioni pjesërisht linear është një hapësirë konformiteti e elementeve të fundme për problemin e modelit.

Metoda e elementeve të fundme quhet metodë e konformitetit të elementit të fundëm (shih 93).

Nëse vendosim bashkë kushtet kufitare, atëherë mund të përcaktojmë hapësirën e zgjidhjes si

$$H_0^1(0, 1) = \{v(x), \quad v(0) = v(1) = 0, \quad v \in H^1(0, 1)\}$$

Kur kërkojmë për një zgjidhje të elementit të fundëm në një hapësirë dimensionale të fundme V_h , cila duhet të jetë një nënhapësirë e $H_0^1(0, 1)$ për metodat e konformitetit të elementit të fundëm, ajo është

$$V_h = \{v_h, \quad v_h(0) = v_h(1) = 0, \quad v_h \text{ është pjesërisht lineare e vazhdueshme në trekëndësh} \}$$

e tillë që

$$V_h \subset H^0(0, 1)$$

Zgjidhja me elemente të fundme është në V_h , një nënhapësirë e $H_0^1(0, 1)$. Nëse zgjidhja e formës së dobët është në $H_0^1(0, 1)$ por jo në hapësirën V_h , atëherë një gabim ka ndodhur si rezultat i zëvendësimit të hapësirës së zgjidhjes me hapësirën me dimensione të fundme. Megjithatë, zgjidhja me elemente të fundme është përafrimi më i mire në V_h në disa norma.

Metoda e shpërbërjes (dekompozimit) e Laplasit (LDM)

Konsiderojmë zgjidhjet e përafërta të problemit jolinear të valës së ujit me thellësi të fundme në praninë e gravitetit. Metoda përdoret për të marrë ekuacionet KdV për solitonet, të cilat përshkruajnë sjelljen e sistemit për sipërfaqen e lirë midis ajrit dhe ujit në një përfaqje jolineare.

Zgjidhjet e problemit të valës së ujit ndahen në dy grupe valësh, një grup lëviz në të majtë dhe një në të djathtë, ku secili prej këtyre grupeve valësh evolon në mënyrë të pavarur si zgjidhjet e ekuacioneve KdV. Zgjidhja e ekuacioneve KdV përftohet në mënyrë analitike duke përdorur metodën e shpërbërjes (dekompozimit) të Laplasit (LDM). Kjo procedurë është një mjet i fuqishëm për zgjidhjen e shumë problemeve jolineare. Kjo metodë ofron zgjidhjen si një seri e cila mund të konvergojë në zgjidhjen e saktë të problemit. Komponentët e shpejtësisë horizontale dhe vertikale kanë natyrë jolineare.

Ekuacioni KdV është nxjerrë fillimisht nga Korteweg dhe de Vries nga valët sipërfaqësore në një kanal. Valët ujore sipërfaqësore jolineare në problemin e turbulencës janë diskutuar në prezencën e efektit të tensionit sipërfaqësor. Bazuar në këtë metodë për një amplitudë të vogël, janë diskutuar zgjidhjet për ekuacionet KdV duke përdorur metodat analitike.

Kemi të bëjmë me një rrjedhë dy dimensionale të ujit me një sipërfaqe të lirë nën fushën gravitacionale. Zona është e kufizuar nga poshtë. Sipërfaqja e sipërme është një kufi i lirë dhe ne marrim në konsideratë ndikimin e fushës gravitacionale në sipërfaqen e lirë. Interesi kryesor është lëvizja në sipërfaqen e lirë, e cila është quajtur vala e gravitetit.

Amplituda e valës është shumë më e vogël sesa për shembull lartësia e shtresës së sipërme të ujit dhe thellësia e ujit është shumë e vogël se gjatësia e tipike e valës. Dihet se solitonët janë ndër strukturat më interesante në natyrë. Duke qenë konfigurime të fushave të vazhdueshme, ato ruajnë formën e tyre të lokalizuar edhe pas ndërveprimeve dhe përplasjeve

Qëllimi kryesor në këtë metodë është që në mënyrë efektive të nxjerrim ekuacionet e KdV dhe të përdorim trajtën e modifikuar të metodës të shpërbërjes së Laplasit për të nxjerrë zgjidhjet e përafruara të përhapjes së valës përgjatë ndërfaqes midis ajrit dhe ujit (shiko [94]).

Le të fillojmë duke trajtuar problemin fizik dhe ekuacionet bazike si më poshtë vijon;

Shqyrtojmë rrjedhën dydimensionale të paqëndrueshme të ujit në një fushë gravitacionale konstante. Koordinatat e hapësirës janë (x, y) dhe nxitimi gravitacional g është në drejtimin y negativ. Le të jetë h thellësia e paturbulluar e ujit. Fundi supozohet se nuk ka topografi në $y = -h$. Ky problem përshkruan dinamikën e ndërfaqes midis ajrit dhe ujit, nën gravitetin g .

Ekuacioni për sipërfaqen e ujit $y = \eta(x, t)$ ku $y = 0$ paraqet situatën e ekuilibrit. Supozojmë se lëvizja është jorrotulluese brenda valës. Kështu, mund të përshkruajmë valën brenda ujit me një potencial të shpejtësisë $\Phi(x, y, t)$ gradienti i të cilit është fusha e shpejtësisë:

$$\left(\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \quad (4.1)$$

Kushti i divergjencës së lirë në fushën e shpejtësisë nënkupton që potenciali Φ i shpejtësisë plotëson ekuacionin e Laplasit:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \text{për } -h < y < \eta(x, t) \quad (4.2)$$

Në një kufi fiks të ngurtë, shpejtësia normale e valës së duhet të shuhet në $y = -h$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{ne } y = -h, \quad (4.3)$$

e cila dikton se nuk ka rrjedhë pingule në fund.

Kushtet kufitare në sipërfaqen e lirë $y = \eta(x, t)$ jepen nga

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (4.4)$$

Nxjerrja e Ekuacioneve Korteweg-de Vries të valës ujore

Tregojmë se është me të vërtetë e mundur të nxjerrim ekuacionet KdV [35] për sipërfaqen e lirë $\eta(x, t)$ duke përdorur një teori të turbullimit me shkall të shumëfishtë. Fusim një parametër ϵ të deformimit që ka vlerë të vogël.

Marrim sistemin e ekuacioneve

$$\epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \text{për} \quad -1 < y < \epsilon \eta(x, t) \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{në} \quad y = -1, \quad (4.6)$$

$$\epsilon \frac{\partial \eta}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{në} \quad y = \epsilon \eta \quad (4.7)$$

Për të marrë një zgjerim të përshtatshëm për potencialin Φ të shpejtësisë, vërejmë se nga ekuacioni i Laplasit (4.5) dhe kushti kufitar (4.6), mund të marrim paraqitjen e mëposhtme për $\Phi(x, y, t)$ si një seri në $y+1$. Meqënëse $\Phi/\partial y = 0$ në $y = -1$,

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (y+1)^n \Phi_n(x, t) \quad (4.8)$$

Bazat e Metodës së Modifikuar Laplasiane të Shpërbërjes

Shqyrtojmë ekuacionin e përgjithshëm diferencial jolinear me derivate të pjesshme të rendit të parë në trajtën e mëposhtme [95]:

$$Lu(x, t) + Ru(x, t) + N(u(x, t)) = h(x, t) \quad (4.9)$$

me kushtin fillestar të mëposhtëm:

$$u(x, 0) = f(x) \quad (4.10)$$

ku L është operatori diferencial i rendit të parë, $L=\partial/\partial t$, R është operatori diferencial linear, $N(u)$ paraqet termin jolinear, dhe $h(x,t)$ është termi burim. Metodologjia konsiston në aplikimin e transformimit Laplasian në të dy anët e (4.9)

$$\mathcal{L}[Lu(x,t)] + \mathcal{L}[Ru(x,t)] + \mathcal{L}[N(u(x,t))]=\mathcal{L}[h(x,t)] \quad (4.11)$$

Duke përdorur vetinë e diferencimit të transformimit Laplasian, marrim

$$s\mathcal{L}[u(x,t)] - f(x) + \mathcal{L}[Ru(x,t)] + \mathcal{L}[N(u(x,t))]=\mathcal{L}[h(x,t)] \quad (4.12)$$

Tani mund të përcaktojmë zgjidhjen (x,t) nga seritë në trajtën e mëposhtëme:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \quad (4.13)$$

dhe operatorin jolinear $N(u)$ i paraqitur nga një seri e pafundme e të ashtuquajturve polinomet e Adomianit:

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (4.14)$$

ku $u_n(x,t)$, $n \geq 0$ janë komponentët e $u(x,t)$ që do të përcaktohen dhe A_n janë polinomet e Adomianit dhe përcaktohen nga

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0 \quad (4.15)$$

Duke përdorur (4.13) dhe (4.14) në (4.12), marrim

$$\mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \right] = \frac{1}{s} f(x) \frac{1}{s} \mathcal{L}[h(x,t)] - \frac{1}{s} \mathcal{L} \left[R \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \right] + \frac{1}{s} \mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right] \quad (4.16)$$

Për qëllim të krahasimit numerik, ndërtojmë zgjidhjen (x,t) e tillë që

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x,t) = u(x,t), \quad \text{ku } U_n(x,t) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i(x,t), \quad n \geq 0 \quad (4.17)$$

Në këtë metodë [94], [95] paraqitëm ekuacionet model për valët ujore sipërfaqësore duke përdorur një metodë të re të teknikës të shkallës së shumëfishtë. Teknika e shkallës së shumëfishtë përdoret për të vlerësuar ekuacionet për teorinë jolineare, duke përshkruar sjelljen e sistemit të turbulluar. Vërejmë se metoda e shkallës së shumëfishtë është një nga metodat

moderne të cilat janë përdorur për të përfutur ekuacionet KdV, për shkak se është relativisht e shkurtër në njehësimet matematikore, më efektive dhe më e qartë. Ndërsa zgjerimet Hamiltoniane dhe zgjerimet e operatorit Dirichlet-Neumann janë komplekse në njehësimet dhe relativisht të gjata në krahasim me metodën e shkallës së shumëfishtë.

Vëmendje e veçantë i është kushtuar gjetjes së zgjidhjeve për ekuacionet e KdV, të cilat përshkruajnë përhapjen e valëve të ujit duke përdorur metoden e modifikuar Laplasiane të shpërbërjes (MLDM) dhe pastaj analizohen dhe diskutohen në mënyrë teorike dhe llogaritëse.

Metoda e përafrimit të zgjidhjes me një polinom

Në shumë raste metodat numerike japin një përafrim të mirë lidhur me përafrimin e zgjidhjeve. Metoda e elementëve të fundme është një rast i veçantë i metodës Galerkin në të cilin funksionet bazë janë zgjedhur të tilla qëdo funksion bëhet 1 në nyjet koresponduese dhe 0 në nyjet e tjera. Metoda Galerkin lejon teknikat e elementeve të fundme të shtrihen në fusha të tilla si mekanika e lëngjeve, veçanërisht në teorinë e valës ujore (shih [88]).

Një zgjidhje e përafërt për ekuacionin linear jepet nga një kombinim linear i N vektorëve bazë në hapësirë lineare. Në veçanti konsiderojmë një klasë të ekuacioneve të valës së ujit. Është marrë në konsideratë problemi fillestar- kufitar. Idea baze është të përdorim një funksion me një numër të panjohur parametrash për të përafëruar zgjidhjen. Funksionet përafëruese polinomiale do të përdoren për të përfaqësuar deformimin e ujit të zonës horizontale. Në veçanti japim idenë e metodës Galerkin që nëse e_i -të përfshijnë të gjithë hapësirën lineare, një vektor që është pingul me gjithë vektorët bazë duhet të jetë zero. Funksionet bazë janë zgjedhur të tilla që njëri prej tyre bëhet 1 në nyjet koresponduese dhe 0 në nyjet e tjera.

4.2 Teoritë Bazë të Përafrimit

- Teoria e valëve me amplitudë të vogël

Teoria bazë e përfarimit konsiston në supozimin se: a) shpejtësia e grimcave të ujit, b) lartësia e sipërfaqes së lirë $y = \eta(x, z, t)$ dhe c) derivatet e tyre janë sasi të vogla. Në fakt ne supozojmë se potenciali i shpejtësisë Φ dhe lartësia e sipërfaqes η zotëron zgjerimet e fuqisë të mëposhtëme në lidhje me një parametër ε si më poshtë:

$$\Phi = \varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)} + \varepsilon^3 \Phi^{(3)} + \dots \quad (4.18)$$

$$\text{dhe } \eta(x, z; t) = \eta^{(0)}(x, z; t) + \varepsilon \eta^{(1)}(x, z; t) + \varepsilon^2 \eta^{(2)}(x, z; t) + \varepsilon^3 \eta^{(3)}(x, z; t) \dots \quad (4.19)$$

Rrjedh së pari se secili prej fuksioneve $\Phi^{(k)}(x, z; t)$ është një zgjidhje e ekuacionit të Laplasit d.m.th.

$$\nabla^2 \Phi^{(k)} = 0 \quad (4.20)$$

Le të flasim për kushtet kufitare.

Në një kufi të caktuar fizik të lëngut, ne kemi të qartë kushtin

$$\frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial n} = 0 \quad (4.21)$$

në të cilin $\frac{\partial}{\partial n}$ paraqet diferencimin përgjatë sipërfaqes normale të kufirit..

Në një sipërfaqe të lirë $S: y = \eta(x, z; t)$ në të cilën presioni është zero kemi dy kushte kufitare;

1) I pari rrjedh nga ligji Bernouilly dhe ka trajtën

$$g\eta + \Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) = 0 \quad \text{ne } S$$

Duke futur (4.18) dhe (4.19) në këtë kusht dhe duke zhvilluar $\Phi_t, \Phi_x^2, \dots$ etj në fuqi të ε , gjejmë kushtet;

$$\eta^{(0)} = 0 \quad (4.22)$$

$$g\eta^{(1)} + \Phi_t^1 = 0 \quad (4.23)$$

$$g\eta^{(2)} + \Phi_t^2 + \frac{1}{2}\left((\Phi_x^{(1)})^2 + (\Phi_y^{(1)})^2 + (\Phi_z^{(1)})^2\right) + \eta^{(1)}\Phi_{ty}^{(1)} = 0 \quad (4.24)$$

në mënyrë që të kënaqet për $y = \eta^{(0)}$ dhe meqënëse $\eta^{(0)} = 0$ nga (4.22) rrjedh se kushtet (4.23) dhe (4.24) përmbushen në të gjithë sipërfaqen e paturbulluar fillestare të ujit $y = 0$.

2) Kushti tjetër në sipërfaqen S rrjedh nga fakti që grimcat e ujit qëndrojnë në S ;

$$\Phi_x \eta_x + \Phi_z \eta_z + \eta_t = \Phi_y \quad \text{ne } S$$

Futja e serive të fuqisë për Φ dhe η në këtë shprehje na çon tek kushtet;

$$\eta_t^{(0)} = 0 \quad (4.25)$$

$$\Phi_x^{(1)} \eta_x^{(0)} + \Phi_z^{(1)} \eta_z^{(0)} + \Phi_t^{(1)} = \Phi_y^{(1)} \quad (4.26)$$

$$\Phi_x^{(2)} \eta_x^{(0)} + \Phi_z^{(2)} \eta_z^{(0)} + \Phi_t^{(2)}$$

$$= \Phi_y^{(2)} - \Phi_x^{(1)} \eta_x^{(1)} - \Phi_z^{(1)} \eta_z^{(1)} - \eta^{(1)} (\Phi_{xy}^{(1)} \eta_z^{(0)} + \eta^{(1)} \Phi_{zy}^{(1)} \eta_z^{(0)} - \Phi_{yy}^{(1)}) \quad (4.27)$$

Shkalla e përafrimit në zbërthimin e serive të turbullimit pas termave $\Phi = \varepsilon \Phi^{(1)}$ dhe $\eta = \varepsilon \eta^{(1)}$ na çon tek kushtet

$$\begin{aligned} g\eta + \Phi_t &= 0 \\ \eta_t - \Phi_y &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Nga eliminimi i η në këto dy relacione, përftohet kushti i vetëm

$$\Phi_{tt} + g\Phi_y = 0 \text{ për } y = 0 \quad (4.29)$$

Kjo metodë na lejon të përcaktojmë Φ nga $\nabla^2 \Phi^{(k)} = 0$ duke përdorur kushtin e fundit (4.29) dhe sipërfaqja e lirë η mund të përcaktohet nga (4.28).

Kjo metodë përdoret për të përfutur kushtet e fundit, ku termat linearë në η dhe Φ dhe derivatet e tyre, kushtet kufitare të sipërfaqes së lirë procedojnë si më sipër. Duke proceduar në këtë mënyrë mund të marrim përafrimin e parë të presionit p në trajtën;

$$k = \frac{p}{q} = -gy - \Phi_t \quad (4.30)$$

Tani mund të shohim thjeshtësimin e madh që rezulton në linearizimin e kushteve të sipërfaqes së lirë, jo vetëm që problemi bëhet linear, por gjithashtu bashkësia në të cilën do të përcaktohet zgjidhja e tij merret apriori.

- Teoria e valës së ujit të cekët e rendit më të ulët.

Në teorinë e valës së ujit të cekët në det, presioni në sipërfaqe $p_0(x, y; t)$ nuk është zero. Kemi

$$g\eta + \Phi_t = -\frac{p_0}{q}$$

Fundi i detit jepet nga $y = -h(x)$. Zhvendosja e sipërfaqes jepet nga $y = \eta(x, t)$.

Komponentët e shpejtësisë jepen nga

$$u(x, y; t) \quad \text{dhe} \quad v(x, y; t)$$

Ekuacioni i lëvizjes së valës është:

$$u_x + v_y = 0 \quad (4.31)$$

Kushtet që duhet të përmbushen në sipërfaqen e lirë janë kushtet kinetike:

$$(\eta_t + u\eta_x - v) |_{y=\eta} = 0 \quad (4.32)$$

Kushtet dinamike të presionit:

$$p |_{y=\eta} = 0 \quad (4.33)$$

Në fund të detit kushti është

$$(uh_x + v) |_{y=-h} = 0 \quad (4.34)$$

Integrojmë ekuacionin (4.31) në lidhje me y dhe kemi

$$\int_{-h}^{\eta} (u_x) + dy + v |_{-h}^{\eta} = 0 \quad (4.35)$$

Përdorim kushtin (4.32) në $y = \eta$ dhe (4.34) në $y = -h$ dhe kemi

$$\int_{-h}^{\eta} u_x dy + \eta_t + u |_{\eta} \cdot \eta_x + u |_{-h} \cdot h_x = 0 \quad (4.36)$$

Paraqesim lidhjen

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x)}^{\eta(x)} u dy = u |_{y=\eta} \cdot \eta_x + u |_{y=-h} \cdot h_x + \int_{-h}^{\eta} u_x dy \quad (4.37)$$

Nga (4.36) dhe (4.37) marrim

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dy = -\eta_t \quad (4.38)$$

Lëvizja e grimcave të ujit.

Supozojmë se S_x dhe S_y paraqesin deformimet në kuptimin e pozicionit (x, y) , për një grimcë të dhënë. Konsiderojmë faktin që S_x dhe S_y dhe derivatet e tyre janë sasi të vogla, mund të shkruajmë:

$$\frac{dS_x}{dt} = u(x, y) = \Phi_x = -mA \cos \partial t$$

$$\frac{dS_y}{dt} = v(x, y) = \Phi_y = -mA \sin \partial t$$

si një përafrim. Konstantja A është një faktor arbitrar, që fikson amplitudën e valës.

Integrojmë dhe kemi

$$\begin{cases} S_x = -\frac{mA}{\sigma} \sin \sigma t \\ S_y = \frac{mA}{\sigma} \cos \sigma t \end{cases}$$

4.3 Metoda e përafrimit të zgjidhjes me një polinom

Fillimisht, konsiderojmë një ekuacion linear në trajtën e përgjithshme $Lu = v$. Më pas shqyrtojmë ekuacionin diferencial të rendit të dytë për një sipërfaqe horizontale të valës së ujit. Meqënëse ky është një ekuacion diferencial i rendit të dytë, dy kushtet kufitare, ose për formimin e valës ose për forcat e brendshme, kërkohen në çdo kufi. Ekuacioni mund të rishkruhet duke përdorur operatorin dydimensional të Laplasit. Mund të shprehim zgjidhjen për ekuacionin e mësipërm në termat e vektorëve vetjakë dhe vlerave vetjake. Një zgjidhje e përafërt për ekuacionin linear jepet nga një kombinim linear i N vektorëve bazë në një hapësirë lineare. Në veçanti konsiderojmë një klasë të ekuacionit të valës së ujit. Është marrë në konsideratë problemi i vlerës fillestare. Duke punuar në hapësirë të dyfishtë japim një teknikë të përafrimit për zgjidhjen e ekuacionit diferencial. Idea bazë është të përdorim një funksion me një numër të panjohur parametrash për të përafëruar zgjidhjen. Funksionet përafëruese polinomiale do të përdoren për të përfaqësuar deformimin e ujit të zonës horizontale.

Në veçanti japim idenë e metodës Galerkin (shih [81]) që nëse e_i -të përfshijnë të gjithë hapësirën lineare, një vektor që është pingul me gjithë vektorët bazë duhet të jetë zero. Hapi i parë në zgjidhjen e problemit të përafrimit është të zgjedhim sistematikisht një funksion të e që plotëson kushtet kufitare të zonës horizontale. Pasi përcaktohet polinomi i rendit të n -të, hapi tjetër është të aplikojmë kushtet kufitare dhe ta zgjidhim për koeficientët e panjohur. Duke zëvendësuar këto vlera të koeficienteve në funksionin polinomial të përgjithësuar, përfundojmë me një polinom të përafrimit për këtë zgjidhje.

Marrim parasysh idenë për të përafëruar zgjidhjen me një polinom që përfshin një bashkësi parametrash. Polinomi merret që të kënaqë si ekuacionin diferencial ashtu edhe kushtet e kufitare përkatëse. Duke përdorur ortogonalitetin e polinomeve, mund ta përafërojmë zgjidhjen për ekuacionin diferencial me ekuacionin e valës së ujit të cekët. Metoda është përdorur për të zgjidhur problemet në inxhinieri mekanike siç janë mekanika strukturore, dinamika, rrjedha e lëngjeve, transferimi i nxehtësisë dhe masës, akustika dhe fusha të tjera të ngjashme

Milder, Miles dhe Broer trajtuan valët e ujit në teorinë Hamiltoniane të valëve sipërfaqësore (shih [71], [72], [73]). Ideja e përafrimit për ekuacionet e valës së gjatë jepet nga Broer (shih [74]). Për të marrë zgjidhjen e saktë mbi teknikën e përafrimit kemi përdorur softuerin *Mathematica*. ([80]).

4.3.1 Gabimi gjatë përafrimit

Para zhvillimit të metodës së elementeve të fundme, ekzistonte një teknikë e përafrimit për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale. Ideja themelore është përdorimi i një funksioni me një numër parametrash të panjohur për të përafuar zgjidhjen (shih [88]). Le të kemi një ekuacion linear

$$L u = v \quad (4.3.1)$$

ku u është funksion i panjohur dhe v është funksioni i dhënë, L është një operator linear (operator diferencial, matricë etj.). Një zgjidhje e përafërt për ekuacionin (4.3.1) jepet nga kombinimi linear i N vektorëve bazë në hapësirën lineare:

$$U_i = \sum_{i=1}^N u_i e_i \quad (4.3.2)$$

ku u_i është koeficienti i panjohur dhe e_i është vektori bazë në hapësirën lineare.

Përcaktojmë G , gabimin midis zgjidhjes së përafërt dhe zgjidhjes së saktë si

$$G = LU_i - s = L \sum_{i=1}^n u_i e_i - s = \sum_{i=1}^n u_i L e_i(x) - s(x) \quad (4.3.3)$$

Rasti 1. Zgjedh u_i që gabimi të bëhet zero në pikat e zgjedhura n , d.m.th.

$$G(x_i) = 0, i = 1, \dots, n \quad (4.3.4)$$

Kjo jep vlerat e sakta në pikat e zgjedhura, por nuk ka asnjë garanci se përafrimi sillet mirë midis pikave të zgjedhura.

Rasti 2. Zgjedh u_i që amplituda e gabimit të bëhet minimum, d.m.th.

$$\|G(x)\| \rightarrow \min. \quad (4.3.5)$$

Kjo jep një përafrim të përgjithshëm të mirë.

Rasti 3. Zgjedh u_i që R të jetë ortogonal në n funksionet bazë (e_i) , d.m.th.

$$(G, e_i) = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (4.3.6)$$

Idea e metodës së Galerkin është që nëse e_i -të përfshijnë të gjithë hapësirën lineare, një vektor që është pingul me të gjithë vektorët bazë duhet të jetë vektor zero.

Në shumë raste metodat numerike na japin një përafrim të mirë të zgjidhjeve. Një përshkrim i energjisë së valës dhe zgjidhjeve të ekuacionit të saj, si edhe të aplikimit në mekanikën kuantike është paraqitur tek [89],[90]). Broer, Van Groesen dhe Timmers kanë studiuar ekuacionet e modelit të qëndrueshëm për valët e gjata të ujit [75].

4.3.2 Përafrimi i zgjidhjes me një polinom

Metoda Galerkin lejon teknikat e elementeve të fundme të shtriheshin në fusha të tilla si mekanika e lëngjeve dhe zgjidhjet seri të disa problemeve të llojeve të ndryshme të valëve. Disa studiues të tjerë kanë testuar vlefshmërinë e ekuacionit të KdV dhe varianteve në eksperimentet laboratorike (Remoissenet [79], Helfrich dhe Melville [78]). Studimi i tyre përfshin një skemë numerike me vlerësime të gabimit, një test konvergjence të kodit kompjuterik, një krahasim midis parashikimeve të modelit teorik dhe rezultateve të eksperimenteve laboratorike. Skema e trajtuar në punën tonë i afrohet modelit teorik, përdor përafrimin e zgjidhjes me polinom dhe përdor algjebrës simbolike, software në llogaritjen e koeficientëve polinomialë.

Le të kemi ekuacionin diferencial për një sipërfaqe horizontale për valët e ujit si më poshtë

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{p_z(x,y)}{S} + \frac{\partial U}{\partial x^2} \quad (4.3.7)$$

ku, p_z është presioni anësor që është aplikuar, S është deformimi i valës.

Meqënëse (4.3.7) është një ekuacion diferencial i rendit të dytë, dy kushtet kufitare, ose për formimin (deformimin) e valëve ose për forcat e brendshme, janë të nevojshme në çdo kufi. Ky ekuacion mund të rishkruhet duke përdorur operatorin dy-dimensional të Laplasit.

$$\left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \text{ as:}$$

$$\nabla \nabla U = \frac{p_z}{S} \frac{\partial U}{\partial x^2} \quad (4.3.8)$$

Konsiderojmë një operator diferencial L , të përcaktuar si

$$L = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \quad (4.3.9)$$

Kështu, ekuacioni (4.3.7) bëhet,

$$LU = \frac{P_z}{S} \quad (4.3.10)$$

Mund të shprehim zgjidhjen për ekuacionin e mësipërm në termat e vektorëve vetjakë dhe vlerave vetjake, të cilat janë përcaktuar si :

$$Le_{nm}(x, y) = \lambda_{nm} e_{nm}(x, y) \quad (4.3.11)$$

ku $e_{nm}(x, y)$ janë vektorët vetjakë dhe λ_{nm} janë vlerat vetjake koresponduese. Pasi njihen vektorët vetjakë dhe vlerat vetjake , është e mundur të shprehësh $U(x, y)$,

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm} e^{\lambda_{nm}} e_{nm}(x, y) \quad (4.3.12)$$

ku, u_{nm} janë koeficientë të panjohur. Vektorët vetjakë, $e_{nm}(x, y)$, shprehen si një kombinim linear i funksioneve bazë , $f_i(x, y)$, si

$$e_{nm}(x, y) = \sum_i^N c_i^{nm} f_i(x, y) \quad (4.3.13)$$

Duhet të zgjedhim funksionet bazë $f_i(x, y)$, të cilat plotësojnë kushtet kufitare. Kështu zëvendësimi i ekuacionit (4.3.13) në ekuacionin (4.3.11) , jep

$$\sum_i^N c_i^{nm} L f_i(x, y) = \sum_i^N \lambda_{nm} c_i^{nm} L f_i(x, y) \quad (4.3.14)$$

Tani, duke shumëzuar ekuacionin (4.3.14) me një tjetër funksion bazë $f_j(x, y)$ i cili gjithashtu plotëson kushtin e kufitar

$$\sum_i^N \sum_j^N c_i^{nm} L f_i(x, y) f_j(x, y) = \sum_i^N \sum_j^N \lambda_{nm} c_i^{nm} L f_i(x, y) f_j(x, y) \quad (4.3.15)$$

mund të shkruajmë ekuacionin e mësipërm në trajtën e mëposhtëme,

$$A\bar{c} = \lambda_{nm} B\bar{c}, \quad (4.3.16)$$

ku

$$a_{ij} = \int_0^a \int_0^b L L f_i(x, y) f_j(x, y) dy dx$$

$$b_{ij} = \int_0^a \int_0^b L f_i(x, y) f_j(x, y) dy dx \quad (4.3.17)$$

Këtu A dhe B janë matrica kuadratike $n \times n$ siç tregohet më poshtë:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nn} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & \dots & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{nn} & \dots & \dots & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

ku λ_{nm} , është vlera vetjake dhe $\bar{c}$ do të jenë vektorët vetjakë korespondues.

Përdorim zbërthimin Cholesky për llogaritjen e vlerave vetjake dhe vektorëve vetjak korespondues.

Shënojmë që në algjibrën lineare një zbërthim matrice ose faktorizim matrice është barazimi i matricës me një prodhim matricash.

Zbërthimi Cholesky i një matrice të përcaktuar pozitivisht A është i trajtës $A = LL^*$, ku L është një matricë trekëndore e poshtme me elemente në diagonalen kryesore reale dhe pozitive, dhe L^* është matrica e konjuguar dhe e transpozuar e matricës L .

Zbatojmë zbërthimin Cholesky në matricën B

$$B = M^T M \quad (4.3.18)$$

ku, M është matrica trekëndore e sipërme dhe M^T është matrica e transpozuar e matricës M . Kështu, ekuacioni (4.3.16) bëhet,

$$A\bar{c} = \lambda_{nm} M^T M \bar{c}, \quad (4.3.19)$$

Mund të llogarisim vlerat vetjake λ_{nm} dhe vektorët vetjak korespondues c me ndihmën e software-it *Mathematika*. Matrica B është e përcaktuar pozitive dhe simetrike. Zbërthimi Cholesky është një metodë më e shpejtë dhe më e qëndrueshme sesa çdo metodë tjetër alternative për zgjidhjen e ekuacioneve lineare. Ne gjithashtu llogarisim vlerat e koeficientëve të panjohur u_{nm} të përdorur në llogaritjen e zgjidhjeve të përafrimit si më poshtë:

$$U_{nm} = \int_0^a \int_0^b f(x,y) e_{mn}(x,y) dy dx$$

ku $f(x,y)$, është kusht fillestar. Kështu duke zëvendësuar vlerat e llogaritura në ekuacion mund të marrim devijimin apo thyerjen anësore të valës ujore.

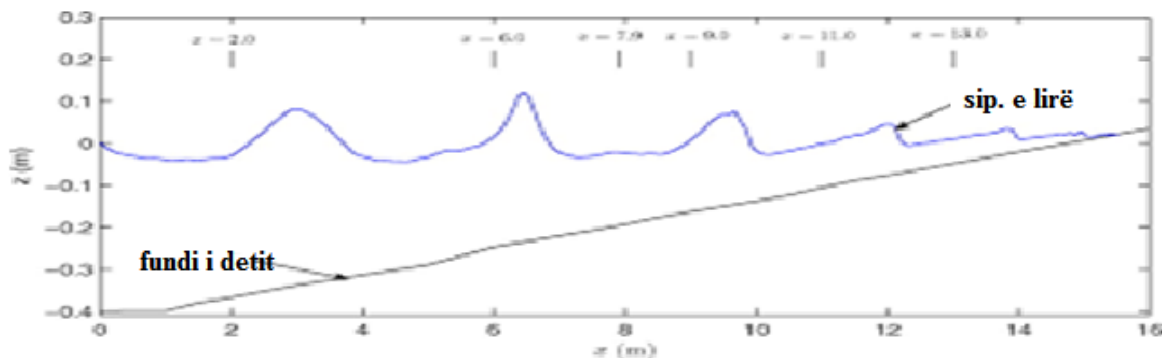


Fig.6 Grafiku i thyerjes së valës

Ekuacionet e valëve të ujit të cekët modelojnë përhapjen e turbullimit në ujë dhe lëngje të tjera. Ekuacionet rrjedhin nga parimet e ruajtjes së masës dhe të momentit (shih [90]). Variablat e pavarur janë koha t , dhe dy koordinatat x dhe y të hapësirës. Variablat e varur janë lartësia e ujit ose thellësia h , dhe fusha e shpejtësisë dy dimensionale të ujit, u dhe v . Me zgjedhjen e duhur të njësiave, sasitë e ruajtura janë masa, e cila është në përpjestim të drejtë me h dhe momenti, i cili është në përpjestim të drejtë me uh dhe vh . Forca që vepron mbi ujë është graviteti, i përfaqësuar nga konstantja gravitacionale g . Ekuacionet diferenciale me derivate të pjesëshme janë:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0$$

Pjesa më e madhe e rrjedhave të ujit të cekët me interes praktik është dy dimensionale. Shumica e metodave kompjuterike për simulimin e rrjedhave dydimensionale bazohen fort në teknikat numerike të përdorura për modelimin e rrjedhave një dimensionale dhe dy dimensionale. Studimi numerik dhe eksperimental i transformimit të një vale të vetme u studiua nga Seabra dhe Renouard (shih [76]) dhe valët në një zonë sërfi janë studiuar nga Svendsen, Madsen dhe Hansen (shih [77]). Konsiderojmë një sipërfaqe drejtkëndore me përmasa a dhe b siç tregohet në figurë



Fig.7-a Sipërfaqe drejtkëndësh me përmasa a dhe b për problemin e valës së ujit të cekët

Meqënëse shumica e rrjedhave të ujit të cekët janë të interesit praktik, ekuacioni diferencial mund të shkruhet si:

$$\frac{\partial^2(Uu)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(Uv)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2(U\tau)}{\partial y^2} = \frac{p_z(x, y)}{S} + \frac{\partial(Uh)}{\partial x^2} \quad (4.3.20)$$

ku, p_z është presioni anësor që është aplikuar, S është deformimi përkulës i valës.

Këtu, u dhe v përcaktojnë komponentët e shpejtësisë në drejtimet x dhe y , respektivisht, dhe τ përcakton thellësinë e sipërfaqes së lirë.

Meqënëse (4.3.20) është një ekuacion diferencial i rendit të dytë, dy kushtet kufitare qoftë për deformimin ose për forcat e brendshme, janë të nevojshme në çdo kufi. Zgjidhja e saktë e ekuacionit (4.3.20) duhet të plotësojë ekuacionin diferencial dhe kushtet kufitare të çdo problemi të zonës horizontale të dhënë. Kushti i ekuilibrit plotësohet duke marrë parasysh një element diferencial të përmasave dx, dy dhe h , intensiteti $p(x, y)$ në sipërfaqen e sipërme të zonës.

Momentet janë:

$$M_x = -S \left(\frac{\partial^2(Uh)}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2(Uh)}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -S \left(\vartheta \frac{\partial^2(Uh)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(Uh)}{\partial y^2} \right)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -S(1 - \vartheta) \frac{\partial^2(Uh)}{\partial x \partial y}$$

Komponentët e zhvendosjes që do të përdoren në formulimin e kushteve kufitare janë devijime dhe pjerrësi anësore. Në skajet e fiksuara, për shembull, devijimi dhe pjerrësia e sipërfaqes së valëve të devijuara janë zero.

Pretendohet që ekuacionet e ujit të cekët jolineare 2D në koordinatat karteziene (x, y) mund të shprehën në formën e konvergencës së rrjedhës :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = fV - \left(\frac{\partial}{\partial x}(Uu) + \frac{\partial}{\partial y}(Uv) - g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \tau^2 \right) + \tau F_x \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -fU - \left(\frac{\partial}{\partial x}(Vu) + \frac{\partial}{\partial y}(Vv) - g \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \tau^2 \right) + \tau F_y \right)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + S$$

Këtu, u dhe v përcaktojnë komponentët e shpejtësisë në drejtimet përkatësisht x dhe y , dhe τ përcakton thellësinë e sipërfaqes së lirë; F_x dhe F_y përcaktojnë fërkimin në drejtimin përkatësisht x dhe y dhe S përcakton burimin e masës. Për linearizimin e ekuacioneve të ujërave të cekët, shprehim thellësinë e sipërfaqes si $\tau = H + h$, ku H dhe h përcaktojnë thellësinë kryesore të shtresës së cekët dhe thellësinë mesatare të shtresës së cekët dhe thellësinë e turbullimit të sipërfaqes së lirë nga H .

Për të njëjtën, ekuacioni Camassa-Holm (CH) :

$$(u - u_{xx})_t + 3uu_x = \varepsilon (2 u_x u_{xx} + uu_{xxx}) , \quad x \in \Omega, t > 0$$

ose

$$u_t - u_{txx} + 3uu_x - 2 u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0$$

Ekuacioni Camassa-Holm gjithashtu zotëron zgjidhje të tipit soliton, d.m.th vales së ngurtësuar, të cilave për shkak të formës së tyre (deformimi), ju është dhënë emri kulmore. Një *zgjidhje kulmore* e vetme jepet nga

$$U(t, x) = ce^{|x-ct|}$$

Shpejtësia e lëvizjes është atëherë e barabartë me lartësinë e kulmit. Duke marrë një kombinim linear të kulmeve, njëra merr atë që quhet *zgjidhje e shumë-kulmore*. Shumëkulmoret kanë formën e mëposhtme:

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^n p_i(t) e^{-|x-q_i(t)|}$$

ku $p_i(t)$ dhe $q_i(t)$ janë zgjidhje të sistemit të mëposhtëm të ekuacioneve diferenciale të zakonshme.

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^n p_j(t) e^{-|q_i(t)-q_j(t)|} \quad \text{dhe} \quad p_i(t) = \sum_{j=1}^n p_i p_j \operatorname{sgn}(q_i - q_j) e^{-|q_i(t)-q_j(t)|}$$

Në kulme, derivati është jo i vazhdueshëm dhe shumëkulmoret mund të jenë vetëm zgjidhjet e (1) në një kuptim të dobët.

Për H të dhënë nga $H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_i p_j e^{-|q_i(t)-q_j(t)|}$, ai mund të rishkruhet si

$$q_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{dhe} \quad p_i(t) = \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

me kushte kufitare

$$u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad u_t(x, 0) = u_1(x)$$

ku $\Omega \subset R^n$, $n \geq 1$ është një bashkësi e kufizuar me kufi të butë $\partial\Omega$.

Tani, le të vazhdojmë me metodën Galerkin për të marrë përafrimin e kërkuar të zgjidhjes për ekuacionin tonë të valës së ujit të cekët në sipërfaqe të lirë horizontale të ujit të detit.

Konsiderojmë metodën standarte Faedo-Galerkin. Marrim një bazë ortogonale të hapësirës në trajtën $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$. Le të jetë $V_m = \text{span}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ një nënhapësirë dhe le të jepen projektionet e të dhënës fillestare në nënhapësirën V_m nga

$$u_0^m(x) = \sum_{j=1}^m a_j \omega_j(x), \quad u_1^m(x) = \sum_{j=1}^m b_j \omega_j(x)$$

ku $u_0^m \rightarrow u_0$ në Ω dhe $u_1^m \rightarrow u$ në $\partial\Omega$, kur $m \rightarrow \infty$.

Ne kërkojmë një zgjidhje të përafrimit $U^m(x, t) = \sum_{j=1}^m g_j^m(t) \omega_j(x)$ të problemit të përafërt, duke studiuar secilin prej kushteve kufitare të deklaruara më parë.

4.3.3 Kushti kufitar i thjeshtë

Në studimin tonë, ne merremi me gjetjen e zgjidhjes për ekuacionin e valës ujore në rastin e studimit të kushtit kufitar të thjeshtë. Konkretisht me kushte më të buta në valën stacionare ujore dhe përafrimin e zgjidhjes me një polinom të një rendi më të ulët të mundshëm për të përmbushur kushtet kufitare.

Për të studiuar secilin prej kushteve kufitare të deklaruara më parë, duhet të fillojmë me ekuacionin diferencial të valës ujore stacionare. Në fillim, duke marrë në konsideratë kushtin kufitar të thjeshtë për një zonë drejtëkëndore, përmasat a dhe b i nënshtrohen ngarkesave anësore.

Figura më poshtë paraqet zonën drejtëkëndore të studimit tonë.

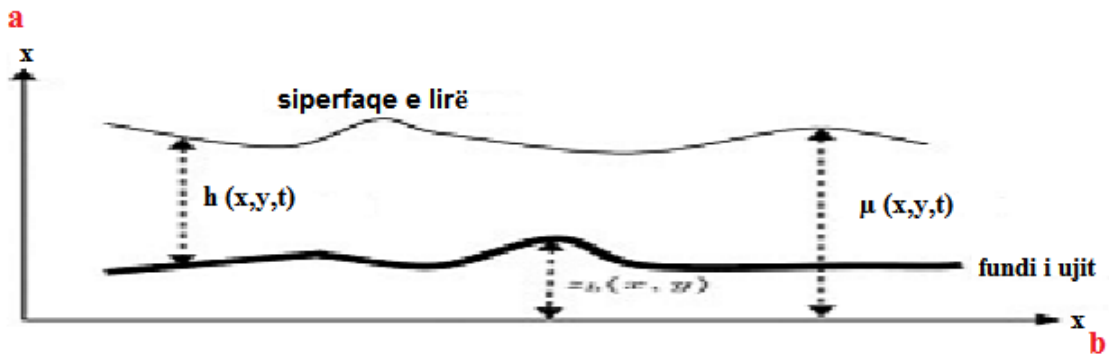


Fig.7-b Sipërfaqe drejtkëndësh me përmasa a dhe b për problemin e valës së ujit të cekët

Ekuacioni diferencial i valës ujore në zonën tonë të lirë të studimit mund të rishkruhet si më poshtë:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{p_z(x,y)}{S} + \frac{\partial U}{\partial x^2} \quad (4.3.21)$$

ku, p_z është presioni anësor që është aplikuar, S është deformimi përkulës i valës. Një kufi që pengohet nga deformimi, por i lirë të rrotullohet rreth një linje përgjatë buzës së kufirit, përcaktohet si kufi mbështetës i thjeshtë. Kushtet në kufin mbështetës paralel me boshtin y në $x = a$ dhe kushtet kufitare janë:

$$U(x,t) = \frac{\partial U}{\partial \Omega}(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad \text{and} \quad U|_{x=a} = 0 \quad (4.3.22)$$

$$U_t(x,0) = u_1(x) \quad M_x|_{x=a} = -S\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_{x=a} = 0 \quad (4.3.23)$$

ku $\Omega \subset R^n$, $n \geq 1$ është një bashkësie kufizuar me kufi të butë $\partial\Omega$.

Meqënëse ndryshimi i U në lidhje me koordinatën y zbehet përgjatë kufirit mbështetës, këto kushte bëhen

$$U|_{x=a} = 0 \quad (4.3.24)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}|_{x=a} = 0 \quad (4.3.25)$$

Në një kufi mbështetës paralel me boshtin x në $y = a$, ndryshimi i w në lidhje me koordinatën x - zbehen; pra, kushtet përgjatë këtij kufiri janë

$$U|_{y=a} = 0 \quad (4.3.26)$$

$$M_y|_{y=a} = -S\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=a} = 0 \quad (4.3.27)$$

Nga supozimi i një zgjidhjeje në trajtën

$$U(x, y) = \sum_i c_i e_i(x, y) \quad (4.3.28)$$

ekuacioni (4.3.21) mund të zgjidhet duke përdorur metodën standart Galerkin. Zëvendësimi i ekuacionit (4.3.28) brenda ekuacionit (4.3.21) dhe integrimi mbi të gjithë zonën horizontale krijon problemin e mëposhtëm të vlerave vetjake

$$[A]\bar{c} = \lambda [B] \bar{c} \quad (4.3.29)$$

duke paraqitur shënimin

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (4.3.30)$$

Gjithashtu

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla \quad (4.3.31)$$

Duke përdorur metodën Galerkin, elementët e matricave [A] dhe [B] jepen nga:

$$a_{ij} = \int_0^a \int_0^b LL f_i(x, y) f_j(x, y) dy dx = \int_0^a \int_0^b \Delta \Delta e_i e_j dx dy \quad (4.3.32)$$

$$b_{ij} = \int_0^a \int_0^b L f_i(x, y) f_j(x, y) dy dx = \int_0^a \int_0^b \Delta e_i e_j dx dy$$

Kur aplikojmë integralin e sipërfaqes mbi sipërfaqen e plotë të zonës horizontale dhe kushtet kufitare homogjene, atëherë, a_{ij} bëhet

$$a_{ij} = \int_0^a \int_0^b (\nabla \cdot \nabla) e_i (\nabla \cdot \nabla) e_j dx dy \quad (4.3.33)$$

Duke zëvendësuar ekuacionin (4.3.30) si $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ në ekuacionin (4.3.33), shprehja përfundimtare për elementet a_{ij} është paraqitur si

$$a_{ij} = \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial^2 e_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_i}{\partial y^2} \right] \left[\frac{\partial^2 e_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_j}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (4.3.34)$$

Duke nxjerrë shprehjen për b_{ij} në të njëjtën mënyrë, duke filluar me ekuacionin (4.3.32) dhe duke përdorur integrimin me pjesë, marrim

$$b_{ij} = - \int_0^a \int_0^b \nabla e_i e_j dx dy \quad (4.3.35)$$

Hapi i parë në zgjidhjen e këtij problemi është të zgjedhësh sistematikisht një funksion trial që plotëson kushtet kufitare të zonës horizontale.

Funksionet e përafrimit me polinomi do të përdoren për të përfaqësuar deformimin anësor të ujit të zonës horizontale .Në këtë rast, funksioni bazë $e_i(x, y)$ do të paraqitet si:

$$\phi_i(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a[i, j] u_j(x, y) \quad (4.3.36)$$

ku

$$u_j(x, y) = x^{L_j} \cdot y^{M_j} \quad (4.3.37)$$

ku, L_j dhe M_j janë numra të plotë pozitive dhe $\phi_i(x, y)$ janë koeficientët që do të përcaktohen.

Në studimin e kushtit kufitar të thjeshtë, është gjetur se një polinom i rendit të tetë është rendi më i ulët i mundshëm për të plotësuar kushtet kufitare.

$$\begin{aligned} \phi_i(x, y) = & a[1,1] + a[2,1]x + a[3,1]y + a[4,1]xy + a[5,1]x^2 + a[6,1]y^2 + a[7,1]xy^2 + \\ & \dots + a[42,1]x^3y^5 + a[43,1]x^2y^6 + a[44,1]xy^7 + a[45,1]y^8 \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

ku $a[1,1] \dots$ deri -- $a[45,1]$ janë koeficientët e panjohur të ϕ_i .

Meqë një polinom kryesor i rendit n përcaktohet sipas (4.3.38), hapi tjetër është aplikimi i kushteve kufitare dhe zgjidhja për koeficientët e panjohur.

Kjo është kryer duke zhvilluar ekuacione të reja duke përdorur *Mathematica*.

Çdo ekuacion paraqet një kusht të ndryshëm kufitar si më poshtë.

Për formimin (deformimin) e valës kushtet kufitare janë:

$$\phi_i(0, y) = 0 \quad (4.3.39)$$

$$\phi_i(a, y) = 0 \quad (4.3.40)$$

$$\phi_i(x, 0) = 0 \quad (4.3.41)$$

$$\phi_i(x, b) = 0 \quad (4.3.42)$$

Për momentet kushtet kufitare janë:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{x=0} = 0 \quad (4.3.43)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{x=a} = 0 \quad (4.3.44)$$

$$\left(\vartheta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0 \quad (4.3.45)$$

$$\left(\vartheta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{y=b} = 0 \quad (4.3.46)$$

Kjo rezulton në një sistem të papërcaktuar prej ekuacioneve me dyzet e pesë të panjohura. Tabelizimi i të gjitha ekuacioneve të mësipërme bëhet duke përdorur komandën Flatten [Tabela] në *Mathematica*. Duke hedhur në tabelë tetë ekuacionet dhe duke i zgjidhur, marrim vlera të koeficientëve $a[i, j]$.

Duke zëvendësuar këto vlera të koeficientëve në funksionin polinomial të përgjithësuar, përfundojmë me një polinom të rendit të tetë (4.3.38), dhe në këtë rast, një ekuacion i pavarur rezulton në polinomin e mëposhtëm.

$$\phi_1(x, y) = (x(1 - 2x^2 + x^3) y(1 - 2y^2 + y^3)) \quad (4.3.47)$$

Përdorim *Mathematica* për të vlerësuar elementet e matricave [A] dhe [B] ku operacionet e integritetit mbarten mbi polinomin. Vlera vetjake vlerësohet duke përdorur komandën Eigenvalue në *Mathematica*, që përputhet me vlerën e gjetur nga ekuacioni (4.3.29) ($[A]\bar{c} = \lambda [B] \bar{c}$)

$$\begin{aligned} \phi_i(x, y) = & a[1] + a[2]x + a[3]y + a[4]x^2 + a[5]xy + a[6]y^2 + a[7]x^3 + a[8]x^2y + \\ & a[9]xy^2 + a[10]y^3 + a[11]y^4 \dots \dots + a[42]x^3y^5 + a[43]x^2y^6 + a[44]xy^7 + a[45]y^8 \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

Në mënyrë që të përmirësohet gabimi i përafrimit dhe të arrihet një konvergjencë e mirë, duhet të merret parasysh një polinom i përafërt me rendin më të lartë. Për shembull, një polinom i rendit të nëntë formohet duke shtuar termat në ekuacion (4.3.38)

$$\begin{aligned} \phi_i(x, y) = & a[1,1] + a[2,1]x + a[3,1]y + a[4,1]xy + a[5,1]x^2 + a[6,1]y^2 + a[7,1]xy^2 \\ & + \dots \dots + a[42,1]x^3y^5 + a[43,1]x^2y^6 + a[44,1]xy^7 + a[45,1]y^8 + a[46]x^9 \\ & + a[47]x^8y + a[48]x^7y^2 + a[49]x^6y^3 + \dots + a[52]x^3y^6 + \dots + a[55]y^9 \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

Koeficientët $a[i, j]$ të cilët përftohen duke zgjidhur ekuacionet e kushteve kufitare janë si më poshtë

Tabela 4.1 – Koeficientët e polinomit të rendit të 8 raport aspekti 1.0

$a[5,1]$	$a[12,1]$	$a[14,1]$	$a[17,1]$	$a[20,1]$	$a[25,1]$	$a[32,1]$	$a[33,1]$
1.00	-2.00	-2.00	1.00	1.00	4.00	-2.00	-2.00

Në mënyrë që të vlerësojmë rezultatin e polinomit të rendit të nëntë, është e nevojshme të ndryshojmë polinomin e rendit të tetë në polinomin e rendit të nëntë. Duke aplikuar kushtet kufitare në këtë funksion të ri përafrimi dhe duke e zgjidhur për të gjithë koeficientët e rendit të nëntë duke përdorur programin *Mathematica*, marrim një sistem të funksioneve triale $\phi_1(x, y)$; $\phi_2(x, y)$; $\phi_3(x, y)$

Koeficientët korespondues në këta tre funksione triale jepen ne tabelën 4.2:

Tabela 4.2 – Koeficientët e polinomit të rendit të 9-të me shkallë 1.0

$a[5,1]$	$a[12,1]$	$a[14,1]$	$a[17,1]$	$a[20,1]$	$a[25,1]$	$a[32,1]$	$a[33,1]$
1.00	-2.00	-2.00	1.00	1.00	4.00	-2.00	-2.00

$a[5,2]$	$a[12,2]$	$a[14,2]$	$a[20,2]$	$a[23,2]$	$a[25,2]$	$a[33,2]$	$a[40,2]$
2.33	-3.33	-4.66	2.33	1.00	6.66	-3.33	-2.00

$a[5,3]$	$a[12,3]$	$a[14,3]$	$a[17,1]$	$a[25,1]$	$a[27,1]$	$a[32,3]$	$a[42,3]$
2.33	-4.66	-3.33	2.33	6.66	1.00	-3.33	-2.00

Duke zëvendësuar këto vlera në ekuacionin (4.3.49) marrim funksionet triale të mëposhtme:

$$\phi_1(x, y) = (x(1 - 2x^2 + x^3) y(1 - 2y^2 + y^3)) \quad (4.3.50)$$

$$\phi_2(x, y) = \left(\frac{x}{3} (7 - 10x^2 + 3x^4) y(1 - 2y^2 + y^3) \right) \quad (4.3.51)$$

$$\phi_3(x, y) = \left(\frac{x}{3} (1 - 2x^2 + x^3) y(7 - 10y^2 + 3y^4) \right) \quad (4.3.52)$$

Ky sistem i rendit të tretë zgjidhet duke përdorur funksionin e vlerave vetjake te *Mathematica*.

Elementet e [A] dhe [B] të gjetura nga komanda integrale e caktuar në *Mathematica* përpunohen më pas duke përdorur funksionin e vlerave vetjake në *Mathematica*.

Kujtojmë që kushtet mbi një kufi të mbështetur paralel me boshtin y në $x = a$, janë:

$$U|_{X=a} = 0 \quad (4.3.53)$$

$$M_x|_{X=a} = -S\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{X=a} = 0 \quad (4.3.54)$$

Në një kufi paralel me boshtin x në $y = a$, ndryshimi i w në lidhje me koordinata x zhduket; pra, kushtet përgjatë këtij kufiri janë

$$U|_{Y=a} = 0 \quad (4.3.55)$$

$$M_y|_{Y=a} = -S\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{Y=a} = 0 \quad (4.3.56)$$

4.3.4 Rezultatet numerike

Pjesa në vijim paraqet rezultatet numerike të arritura për problemet e diskutuara në pjesën e trajtuar më lart. Të gjitha njehsimet janë kryer me software-in e algjibrës simbolike, *Mathematica* [80].

Ne analizojmë rezultatet e një zone katrore uji të sipërfaqes së lirë, pra valën e ujit në rastin stacionar për kushtin kufitar të thjeshtë, të dhënë. Në këtë lloj kushti kufitar ku të gjitha anët janë të mbështetura thjesht, zona është e penguar nga deformimi, por e lirë të rrotullohet rreth një vije përgjatë kufirit.

Pasi të jenë zbatuar kushtet kufizuese, hapi tjetër është të zgjedhim funksionet triale të përshtatshme që përmbushin plotësisht kushtet kufitare.

Për kushtet kufitare aktuale, funksioni trial mund të zgjidhet si

$$\phi_i(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a[i, j] u_j(x, y) \quad (4.3.57)$$

ku

$$u_j(x, y) = x^{L_j} \cdot y^{M_j} \quad (4.3.58)$$

L_j dhe M_j janë numra të plotë pozitiv dhe $\phi_i(x, y)$ janë koeficientët që duhet të përcaktohen

Në shembullin e kushtit kufitar të mbështetur thjesht, është gjetur që një polinom i rendit të tetë është rendi më i ulët i mundshëm që plotëson kushtet kufitare.

$$\begin{aligned} \phi_i(x, y) = & a[1,1] + a[2,1]x + a[3,1]y + a[4,1]xy + a[5,1]x^2 + a[6,1]y^2 + a[7,1]xy^2 + \\ & \dots + a[42,1]x^3y^5 + a[43,1]x^2y^6 + a[44,1]xy^7 + a[45,1]y^8 \end{aligned} \quad (4.3.59)$$

ku $a[1,1] \dots$ nëpër-- $a[45,1]$ janë koeficientët e panjohur të ϕ_i .

Tabela 4.3 Krahasimi i vlerave vetjake për sipërfaqe thjesht të mbështetur të valës së ujit .

Rendi	Përafrimi i drejtëpërdrejtë
8	389.969
9	389.69, 2463.33
10	389.636, 2463.33, 6304.32
11	389.637, 2435.33, 6304.32
12	389.63, 6234.5
13	383.26, 2435.07, 6234.56
14	831.41, 2373.52, 6388.73,
15	670.524, 1147.44, 4740.78,

Rendi	Zbërthimi i Cholesky
8	389.969
9	389.969, 401401.4
10	389.969, 401401.4, $6.34 \cdot 10^7$
11	389.969, 401401.4
12	389.96, 20443.4, 401401.4
13	389.969, 401401.39
14	389.969, 401401.39
15	389.969, 401401.39

Sapo problemi i vlerave vetjake të zgjidhet duke përdorur metodën e përgjithësuar, e tërë procedura kryhet duke llogaritur vlerat vetjake dhe vektorët vetjakë korespondues duke përdorur zbërthimin Cholesky për matricën [B]

$$B = M^T M \quad (4.3.60)$$

ku, M është matrica trekëndore e sipërme dhe M^T është e transpozuar e matricës M .

Rezultati i marrë duke përdorur zbërthimin Cholesky ishte shumë i saktë dhe i pajtueshëm me metodën e drejtëpërdrejtë të vlerave vetjake.

4.4 Aplikimi në probleme të turbullimit të valës ujore

Problemet e turbullimit janë ekuacione diferenciale (të zakonshme ose me derivate të pjesshme) që varen nga parametër i vogël pozitiv, ε , dhe zgjidhjet e të cilave (ose derivatet e tyre) përqasin një limit jo të vazhdueshëm kur ε afrohet zeros.

Probleme të tilla quhen të turbulluara në mënyrë të vetme, kur konsiderojmësi një parametër turbullimi.

Zgjidhja në një turbullim të procesit të valës së ujit

Krahasojmë dy ekuacionet e mëposhtme diferenciale:

$$-u''(x) + \varepsilon u(x) = f(x) \text{ në } (0,1), \text{ me } u(0) = u(1) = 0 \quad (1)$$

dhe

$$-\varepsilon u''(x) + u(x) = f(x) \text{ në } (0,1), \text{ me } u(0) = u(1) = 0 \quad (2)$$

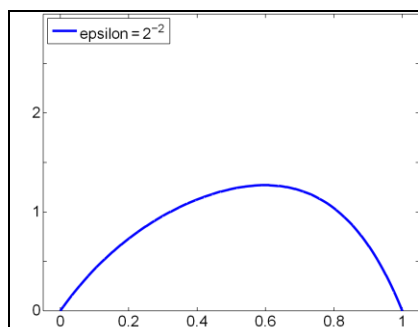
Nëse $\varepsilon = 0$ në (1), nuk ndodh asgjë e jashtëzakonshme, ne ende kemi një ekuacion diferencial të mirë-paraqitur.

Por nëse $\varepsilon = 0$ në (2), problemi nuk është i mirë-paraqitur, pasi $f(0) = f(1) = 0$, nuk mund të përmbush $u = f$ dhe kushtet fillestare kufitare.

Pyetje: Çfarë ndodh kur $\varepsilon \rightarrow 0$?

Problemi 1 Zgjidhjet e problemit të reagimit të turbullimit

$$-\varepsilon^2 u''(x) + u(x) = e^x \text{ në } (0,1), \text{ me } u(0) = u(1) = 0 \quad (3)$$



Zgjidhjet për këtë ekuacion duken si

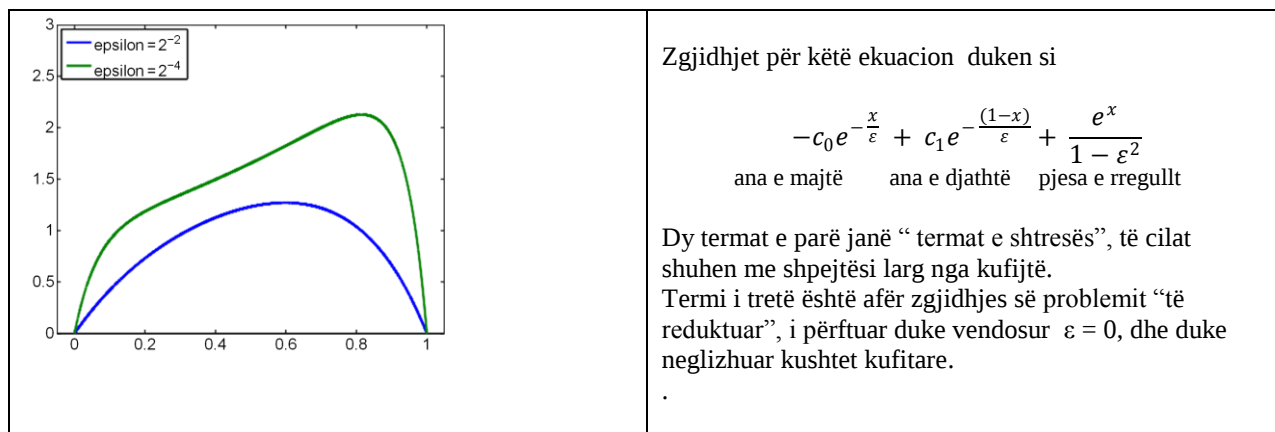
$$-c_0 e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + c_1 e^{-\frac{(1-x)}{\varepsilon}} + \frac{e^x}{1 - \varepsilon^2}$$

ana e majtë ana e djathtë pjesa e rregullt

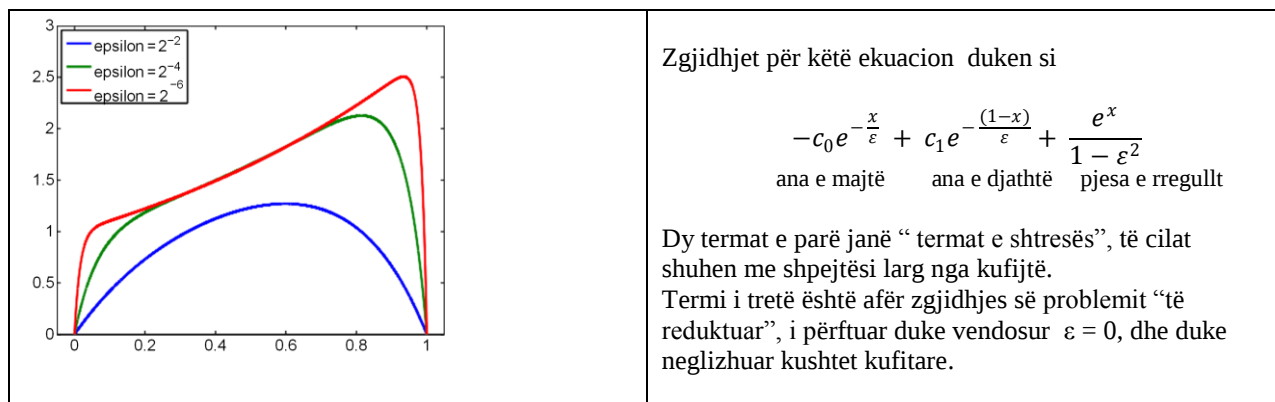
Dy termat e parë janë “termat e shtresës”, të cilat shihen me shpejtësi larg nga kufijtë.

Termi i tretë është afër zgjidhjes së problemit “të reduktuar”, i përfutur duke vendosur $\varepsilon = 0$, dhe duke neglizhuar kushtet kufitare.

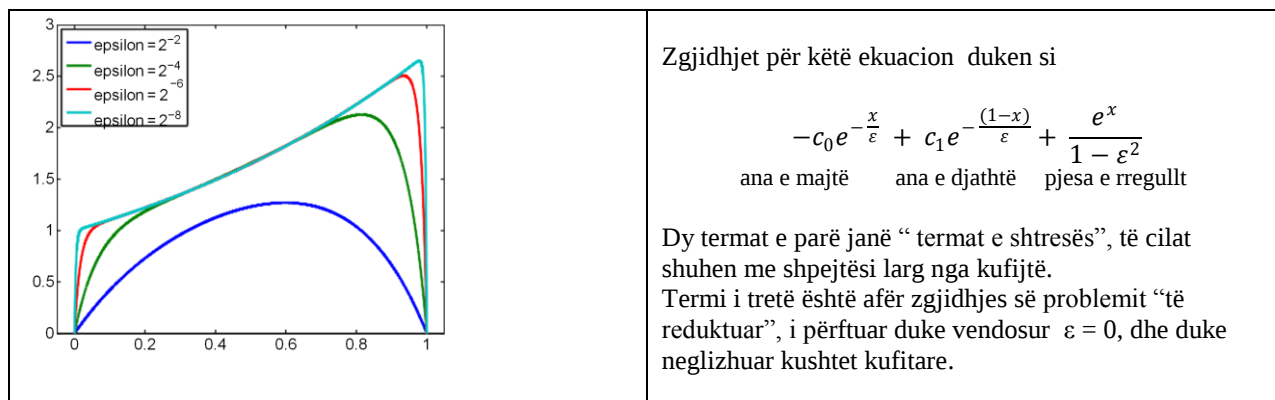
$$-\varepsilon^2 u''(x) + u(x) = e^x \text{ në } (0,1), \text{ me } u(0) = u(1) = 0 \quad (3)$$



$$-\varepsilon^2 u''(x) + u(x) = e^x \quad \text{në } (0,1), \quad \text{me } u(0) = u(1) = 0 \quad (3)$$



$$-\varepsilon^2 u''(x) + u(x) = e^x \quad \text{në } (0,1), \quad \text{me } u(0) = u(1) = 0 \quad (3)$$

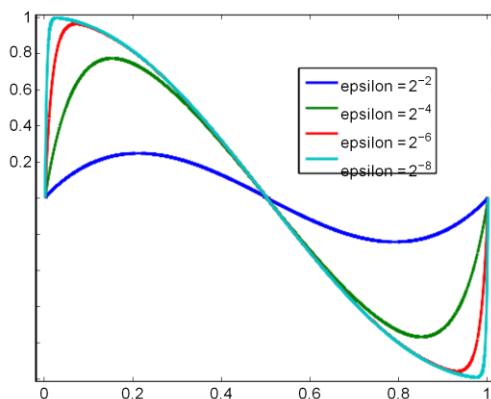


Problemi 2 Reaksion-difuzion i valës së ujit

Këtu vijojmë me grafikët e zgjidhjeve të tyre dhe disa shënime për atë që i bën ata interesante. Kjo do të përfshijë:

Rasti i reaksion-difuzion i valës së ujit

$$-\varepsilon^2 u''(x) + u(x) = \cos(\pi x) \text{ në } (0,1), \text{ me } u(0) = u(1) = 0 \quad (4)$$

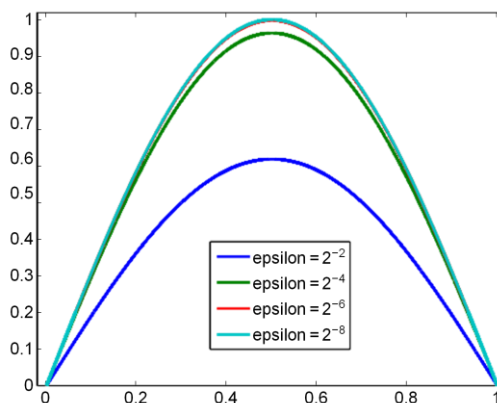


Zgjidhja përmban shtresa të gjerësisë $O(\varepsilon)$ afër $x = 0$ dhe $x = 1$.

Larg nga shtresat $u \sim \cos(\pi x)$

Një rast tjetër i reaksion difuzion të valës së ujit

$$-\varepsilon^2 u''(x) + u(x) = \sin(\pi x) \text{ në } (0,1), \text{ me } u(0) = u(1) = 0 \quad (5)$$



Zgjidhja e ekuacionit të reduktuar plotëson kushtet kufitare.

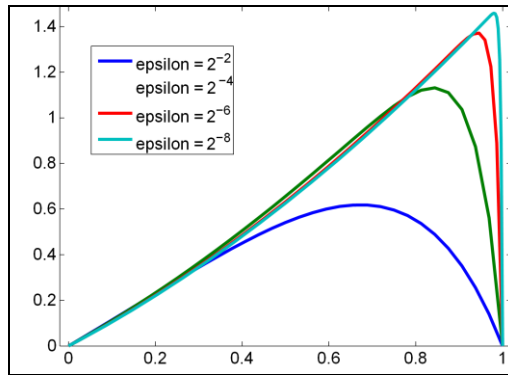
Në fakt, $u = \sin(\pi x)/(\pi^2 \varepsilon^2 + 1)$.

Rasti i një konveksioni difuzion të valës së ujit

$$\varepsilon u''(x) + u'(x) = x + 1 \text{ në } (0,1), \text{ me } u(0) = u(1) = 0 \quad (6)$$

Zgjidhje e këtij ekuacioni është

$$\frac{\varepsilon + 3/2}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - c_1 e^{-\frac{(1-x)}{\varepsilon}} \right) + \varepsilon x + \frac{x^2}{2} + x$$



Vërejmë që koeficienti i difuzionit është ε , dhe jo ε^2 .
Zgjidhja ka një shtresë të vetme, afër $x = 1$.
Diku tjetër, zgjidhja i ngjan asaj si

$$u'(x) = x + 1$$

Llogaritja e zgjidhjeve stabil mund të jetë një sfidë për këtë problem.

Studimi i këtyre ekuacioneve diferenciale me paraqitje të thjeshtë shpejt bëhet mjaft komplekse kur zgjerohet në sistemet e shoqëruara.

Shembulli ynë më i thjeshtë ka vetëm dy ekuacione.

Një sistem i ekuacioneve reaksion-difuzion

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}^2 u''(x) + B(x)u = f \text{ ne } (0,1), \quad \text{me } u(0) = u(1) = 0$$

Ka shume variante të mundshme për këtë problem, duke përfshirë

Sistemet e ekuacioneve $l > 1$;

Sistemet e ekuacioneve konveksion-difuzion; Sisteme të shoqëruara.

Përkundër thjeshtësisë së tij, ka shumë gjëra që mund të mësohen nga ky problem, i cili në vetvete shpesh reduktohet në tre nën-klasa:

$$(a) \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \leq 1$$

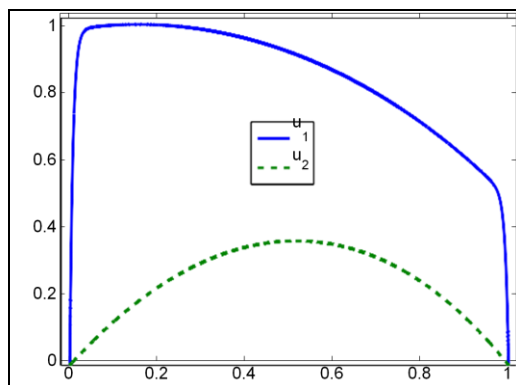
$$(b) \quad \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 = 1$$

$$(c) \quad \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq 1$$

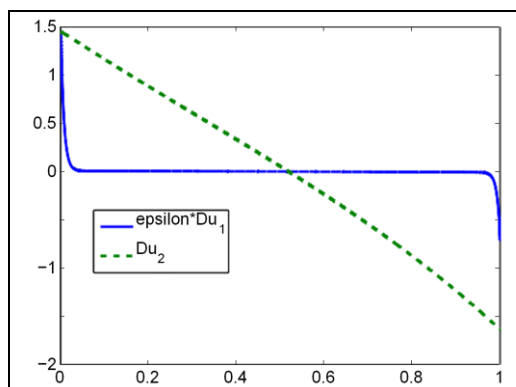
Rasti (a) është më pak interesanti. Sipas supozimeve të arsyeshme për (b), shumica e teknikave (numerike dhe matematikore) shtrihen drejtpërdrejtë në këtë rast.

Rasti (b) $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 = 1$

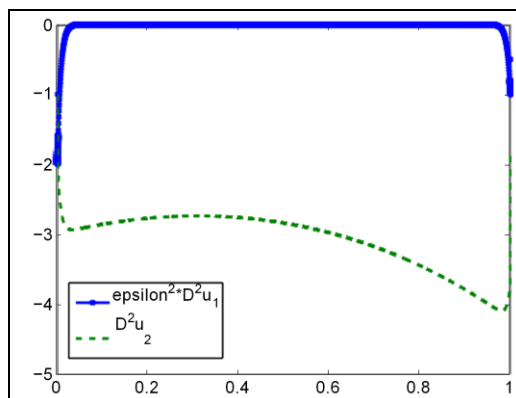
$$\begin{pmatrix} 10^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 u''(x) + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 2-x \\ 1+e^x \end{pmatrix} \text{ ne } (0,1), \quad \text{me } u(0) = u(1) = 0$$



Komponenti u_1 përfshin shtresa “të forta”, të gjerësisë $O(\varepsilon)$.
dhe
 u_2 përfshin shtresa “të dobëta”: u_1' dhe u_1'' janë të kufizuara pavarësisht nga ε , por u_2'' nuk është.



Komponenti u_1 përfshin shtresa “të forta”, të gjerësisë $O(\varepsilon)$.
dhe
 u_2 përfshin shtresa “të dobëta”: u_1' dhe u_1'' janë të kufizuara pavarësisht nga ε , por u_2'' nuk është.



Komponenti u_1 përfshin shtresa “të forta”, të gjerësisë $O(\varepsilon)$.
dhe
 u_2 përfshin shtresa “të dobëta”: u_1' dhe u_1'' janë të kufizuara pavarësisht nga ε , por u_2'' nuk është.

Rasti (c) $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq 1$

$$\begin{pmatrix} 10^{-4} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{pmatrix}^2 u''(x) + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 2-x \\ 1+e^x \end{pmatrix} \text{ në } (0,1), \text{ me } u(0) = u(1) = 0$$

Përmirosime të metodave numerike në problemin jolinear të vlerave vetjake

Problemi i përgjithshëm jolinear i vlerave vetjake na motivon të paraqesim një algoritëm paralel për të gjetur rrënjët e një funksioni analitik kompleks në një zonë të caktuar. Algoritmi bazohet në një version dy dimensional të algoritmit të përgjysmimit dhe është implementuar në paralel duke përdorur një model programimi master – slaves. Master është përgjegjës për organizimin e procesorëve slave të cilët janë përgjegjës për përcaktimin nëse gjendet ndonjë rrënjë në një zonë të caktuar. Rezultatet e testit tregojnë se ky algoritëm arrin efikasitet të mirë nëse numri i procesorëve nuk i kalon katër herë numrin e rrënjëve në zonën fillestare.

Ka metoda të cilat bazohen në rezultatet elementare nga analiza komplekse, të cilat janë shumë të fuqishme dhe gjejnë çdo rrënjë brenda zonës së caktuar për një klasë shumë të madhe funksionesh. Një fuqi e tillë është e kushtueshme dhe për këtë arsye eksperimentet punohen duke projektuar algoritmin për ta implementuar në një kompjuter paralel.

Ka shumë algoritme për të përcaktuar rrënjët e funksioneve të veçanta analitike. Më të njohurat janë metodat iterative për gjetjen e vlerave vetjake të një matrice katrore. Shumë autorë kanë propozuar përdorimin e teorisë së variablit kompleks për të gjetur rrënjët e një polinomi (p.sh. [Wilf, 1978] dhe [Carentensen, 1993]). Programe të tilla si MATLAB përdorin metoda që bazohen në rishkrimin e problemit polinomial si një problem i matricës së vlerave vetjake. Hulumtimet e fundit mbi problemin jolinear të vlerave vetjake janë përqendruar në zgjerimin e metodave ekzistuese vetëm për probleme të kompleksitetit pak më të mëdha, të tilla si problemi kuadratik i vlerave vetjake [Bai, Demmel, Dongarra, Ruhe, Van der Vorst, 2000]. Megjithatë, ka disa raste në të cilat problemi jolinear i vlerave vetjake është i kompleksitetit të plotë [Meylan, 2002] dhe ne ballafaqohemi me gjetjen e vlerave vetjake të një matrice e cila është një funksion arbitrar i parametrin vlerë vetjake. Duke marrë përcaktorin e kësaj matrice mund ta paraqesim këtë problem si një prej atyre që gjejnë rrënjët e një funksioni analitik.

Metoda që ne paraqesim për të gjetur rrënjët e një funksioni kompleks analitik bazohet në rezultatin e mëposhtëm nga teoria elementare e variablit kompleks. Algoritmi është një përgjithësim i algoritmit të përgjysmimit për funksionet e një variabli real. Në çdo hap të iteracionit zona ndahet dhe çdo nënzonë i nënshtrohet kërkimit. Nëse zona përmban një rrënjë, ndahet më tej dhe procesi përsëritet. Për më tepër, ky algoritëm implementohet për t'u ekzekutuar në një kompjuter paralel duke përdorur një model programimi master - slaves. Rezultati i llogaritjeve të testimit kanë treguar se ky algoritëm arrin efikasitetin më të mirë nëse numri i procesorëve nuk e kalon katër-fishin e numrit të zerove në zonën e parë(shiko [96]).

Problemi jolinear i vlerave vetjake.

Në problemin jolinear të vlerave vetjake parametri shfaqet në një mënyrë më të komplikuar në matricë. Në problemin e përgjithshëm jolinear të vlerave vetjake duhet të gjejmë vlerat vetjake, ku matrica është një funksion analitik arbitrar i parametrin . Ky problem lind kur situatat

modeluese përfshijnë ndërveprime të komplikuar, për shembull, në mes të një lëngu dhe një strukture. [Meylan, 2002] tregoi se mënyrat e vibrimit në pak ujë mund të përcaktohet duke zgjidhur një problem të tillë të përgjithësuar vlerash vetjake.

Metodat për zgjidhjen e problemit linear të vlerave vetjake nuk i referohen funksionit analitik f në mënyrë direkte por transformojnë M në një matricë diagonale ose pothuajse diagonale. Këto metoda nuk mund të zbatohen në problemin e përgjithshëm jolinear të vlerave vetjake; megjithatë, ekzistojnë përgjithësime për problemin kuadratik të vlerave vetjake. Pra, në rastin e përgjithshëm jolinear i referohemi problemit të gjetjes së rrënjëve të f . Sigurisht kjo qasje mund të përdoret për rastet lineare dhe kuadratike, por pritet që të përfundojnë me një metodë më pak efikase.

Algoritmi i kërkimit

Vështirësia në përcaktimin e rrënjëve të një funksioni analitik kompleks vjen për shkak se nuk është e mundur që të përdoret një algoritm i shpejtë kërkimi i tillë si metoda e prerësës ose e Newton-it sepse këto metoda kërkojnë një përafrim fillestar i cili është afër zgjidhjes.

Algoritmi që propozohet është një përgjithësim i algoritmit të njohur të përgjysmimit për të gjetur rrënjët e një funksioni që mer vlera reale. Ky është jashtëzakonisht i thjeshtë dhe i fuqishëm, por kërkon burime të mëdha kompjuterike.

OpenMP është përshtatur mirë për llogaritjet numerike. Duke u mbështetur në punimet [96], [97]), ne paralelizuam në këtë platformë algoritmet Durand – Kerner, Börsch – Supan dhe algoritmin Ehrlich – Aberth përgjetjen e rrënjëve të polinomit dhe kemi marrë rezultate inkurajuese.

Algoritmi fillon nga një katror fillestar S në s . Është supozuar se f është analitik në këtë katror dhe në fqinjët e tij. Algoritmi i kërkimit përpiqet të gjejë të gjitha rrënjët e f që shtrihen brenda këtij katrori S . Në çdo hap të këtij procesi iterativ kërkohet një grup katrorësh. Katrorët që përmbajnë një rrënjë ndahen më tej. Nëse një katror nuk përmban rrënjë atëherë procesi i ndarjes për të ndërpritet. Në rastin më të keq në të cilin të gjithë katrorët e kërkuar në një iteracion përmbajnë të paktën një rrënjë katërfishohet numri i katrorëve që meren në konsideratë në hapin pasardhës.

Në mes të këtyre dy rasteve ekstreme vendoset një situatë praktike. Algoritmi mund të dështojë nëse kemi dy apo më shumë rrënjë të izoluara së bashku të cilat janë afër kufirit. Megjithatë, edhe pse vlera e N -së së kthyer nga algoritmi është më e vogël se numri aktual i rrënjëve në S , ende kthehet një vlerë pozitive e cila është e mjaftueshme për të vendosur nëse S duhet të ndahet.

Një problem i algoritmit është rasti kur një rrënjë shtrihet në kufirin e katrorit ose në afërsi të tij. Në këtë rast mund të ndodhë që nuk gjendet një rrënjë edhe pse katrori përmban një të tillë. Gjendet një mënyrë që me vetëm pak kosto shtesë mund të rrisë madhësinë e katrorit fillestar dhe

të çdo nënkatrori të tij kur është i ndarë. Kjo do të jap disa mbivendosje të nënkatorëve në mënyrë që rrënjët të mos shtrihen në afërsi të kufirit të dy katorëve. Ne sugjerojmë që në raste të caktuara kjo mund të jetë metodë e privilegjuar, veçanërisht në situata kur ka të ngjarë të ndodhi grupimi i rrënjëve.

Natyrisht mund të ndërtohet një funksion për të cilin dështon gjetja e një rrënjë brenda katorit të veçantë, për shembull, duke zgjedhur funksionin që të ketë vlerë 1 në çdo pikë ku ne vlerësojmë f rreth katorit dhe ende të përmbajë një rrënjë në kator.

Implementimi në paralel i algoritmit të kërkimit

Qëllimi kryesor është implementimi i algoritmit në një kompjuter paralel. Algoritmi është i përshtatshëm për paralelizim meqenëse detyrat e kërkimit të katorëve në një iteracion të veçantë janë të pavarura dhe për këtë arsye mund të ekzekutohet lehtë në paralel.

Në punimin [98] është paraqitur paralelizimi i metodës së drejtpërdrejtë Monte Carlo në platformën MPI dhe është bërë një përmirësi i këtij algoritmi. Është punuar duke implementuar versionin më të drejtpërdrejtë të këtij algoritmi i cili punon si vijon:

një procesor i veçantë, i quajtur master, organizon punën e procesorëve të mbetur të quajtur slaves. Veprimi i procesorëve slave është më i drejtpërdrejtë. Secilit procesor slave i jepet perimetri i një katorit në planin kompleks në të cilin ai duhet të përcaktojë numrin e rrënjëve duke përdorur ekuacionin. Pasi ka finalizuar këtë detyrë ai kthen këtë informacion dhe pret t'i jepet një detyrë e mëtejshme.

Procesori master mban tabelën e katorëve që do të kontrollohen dhe i shpërndan ato në procesorët slave që janë të lirë. Pasi një procesor slave ka përfunduar llogaritjen e tij ky informacion përdoret për të riorganizuar punën si më poshtë:

Katorit i përpunuar hiqet nga tabela dhe nëse ai përmbante një rrënjë, shtohen katër katorë të rinj. Pas këtij hapi përditësimi, procesori master shpërndan katorët duke pritur për lirimin e procesorëve slave deri kur ose nuk ka procesorë slave të lirë ose nuk ka katorë për të përpunuar. Në rast se ka më shumë procesorë slave se katorë për t'u përpunuar atëherë do të ketë procesorë slave që nuk do të kenë detyrë për të kryer. Algoritmi mbaron kur rrënjët janë përcaktuar në një saktësi të caktuar.

Metodat simultane llogarisin të gjitha rrënjët e polinomit njëkohësisht brenda të njëjtit iteracion dhe ky është një avantazh, i cili mundëson paralelizimin e këtyre metodave.

Ekzekutimi i algoritmeve të metodave të tjera në OpenMP përafron rrënjët në iteracionin e pestë dhe koha e ekzekutimit në OpenMP i algoritmit është më e shpejtë se koha e ekzekutimit të tij në C++. Kontributi i zgjidhjes paralele na lejon për të përshpejtuar kohën e ekzekutimit dhe për të studiuar shkallë edhe më të rëndësishme të polinomit përafrues (shih [99]).

Duke qenë se koha e përlllogaritjes është pothuajse e pavarur nga dimensionet e matricës dhe efikasiteti paralel i tyre është superlinear, ne propozojmë që ky algoritëm të përdoret për të gjetur vlerat vetjake dominante të matricave shumë të mëdha dhe të rralla.

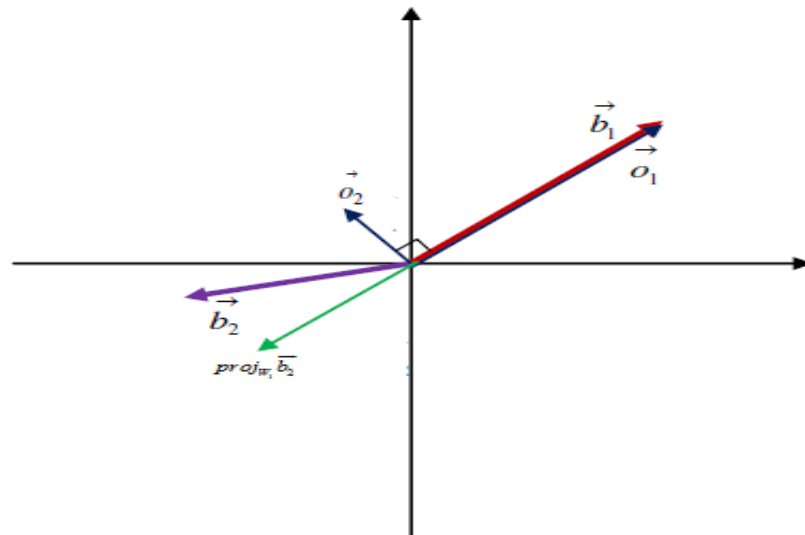


Fig. 8 Ndërtimi i një baze ortogonale në hapësirën 2 përmasore R^2 .

Tabela 4.4 Rezultate të matjeve të ekzekutimit me procesorë me frekuencë 3.2Ghz dhe me kujtesë të ndryshme

Nr.procesorëve	Frekuenca e Procesorit GHz	Përmasa e kujtesës	Koha e ekzekutimit
1	3.2	4	18.08
2	3.2	4	18
4	3.2	4	17.8
8	3.2	4	17.04
16	3.2	4	17.02
1	3.2	8	18.08
2	3.2	8	18
4	3.2	8	17.59
8	3.2	8	17
16	3.2	8	17

Fig. 9 Koha e ekzekutimit në klaster me procesorë 3,2GHz dhe me memorie 4 dhe 8GB për mbledhjen e dy vektorëve

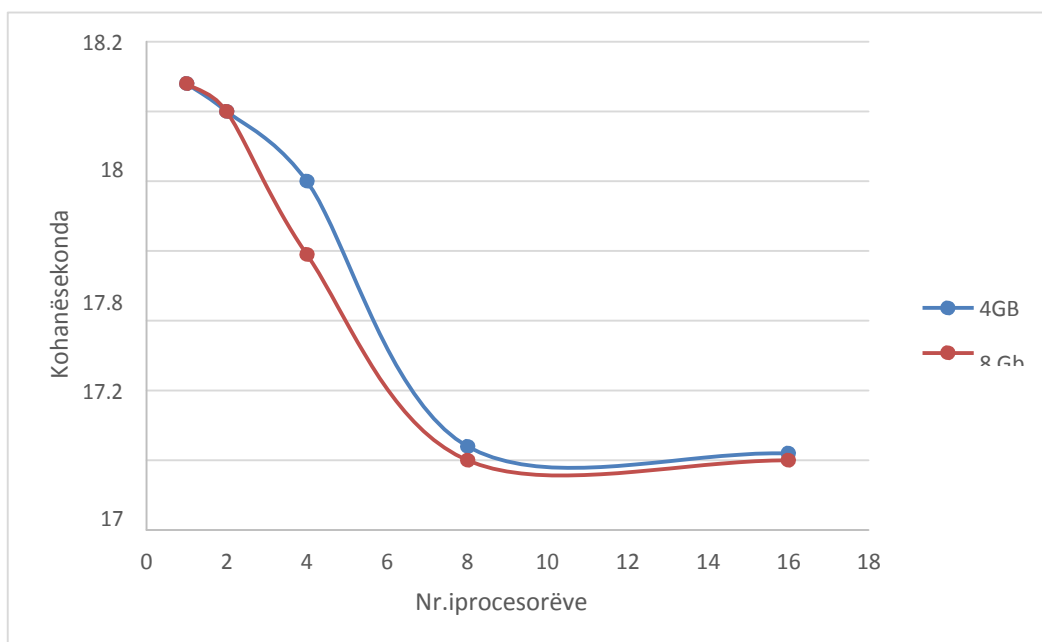


Tabela 4.5 Rezultatet e matjeve të ekzekutimit në mjedise me parametra të ndryshëm për kodin e shumëzimit të dy matricave

Shumëzimi i matricave në sekuencial($O(n^3)$) 4000 përmasa në klaster me procesor 3,2GHz		
Nr procesorëve	Përmasa e memories	Koha e ekzekutimit
1	4	57.00
1	8	56.00
2	4	42.00
2	8	37.00
4	4	32.00
4	8	28.00
8	4	26.00
8	8	25.50
16	4	25.30
16	8	25.30

Fig. 10 Koha e e kzekutimit në klaster me procesorë 3,2 GHz për shumëzimin e dy matricave

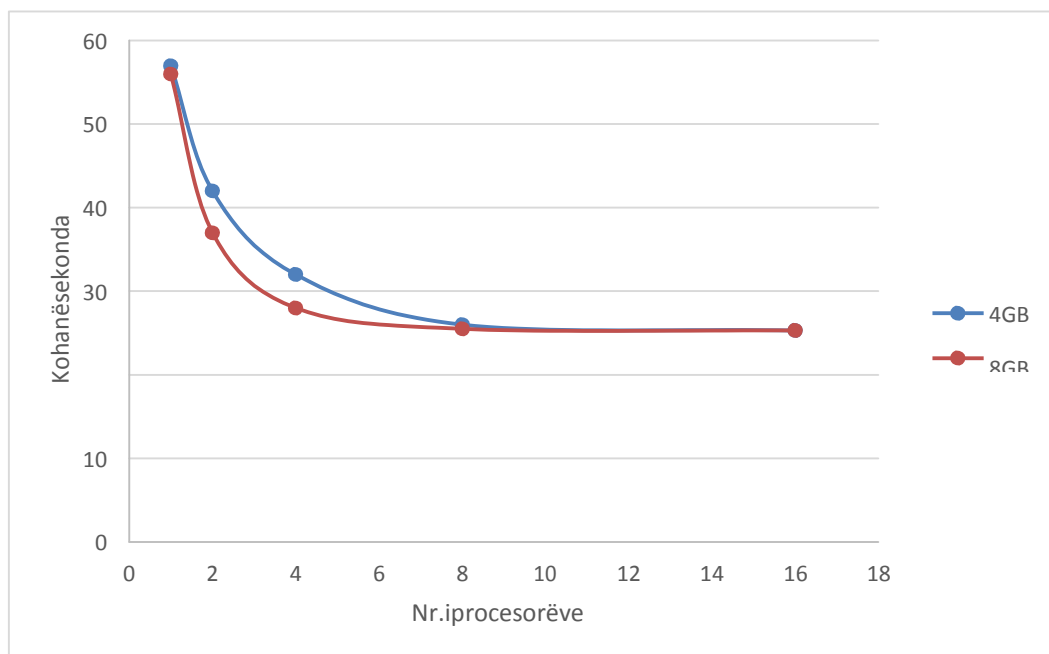
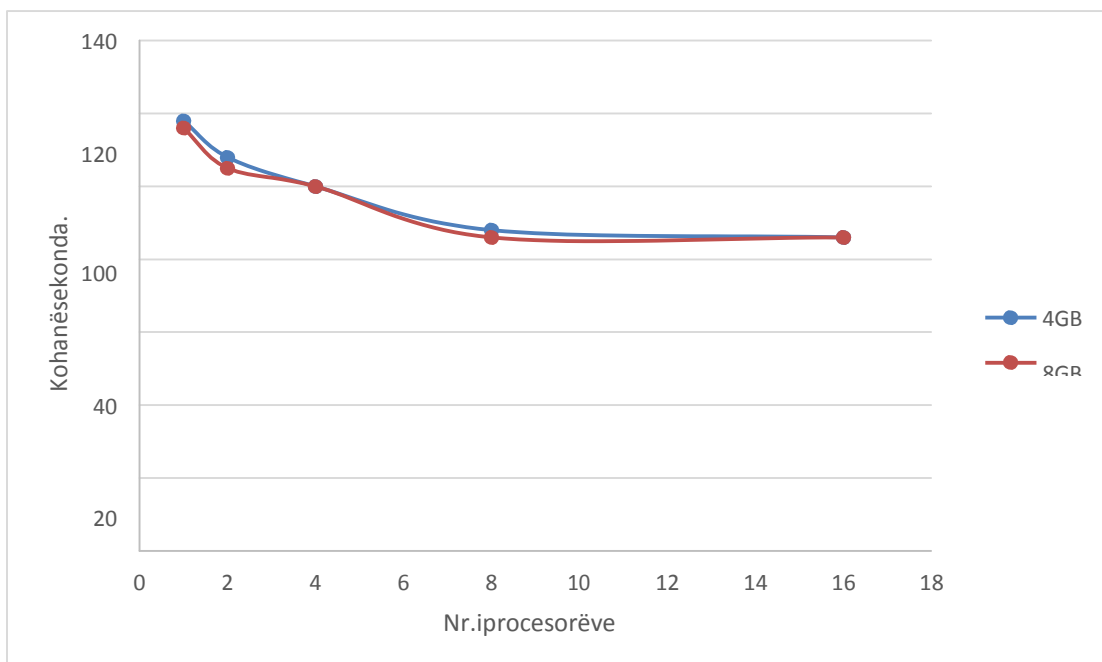


Tabela 4.6 Rezultatet e matjeve të ekzekutimit në mjedise me parametra të ndryshëm për kodin e Eleminimit të Gausit

Eleminimi i Gausit në Sekuencial ($O(n^3)$) 5000 përmasa në klaster me processor 3,2 GHz		
Nr. procesorëve	Përmasa e memories	Koha e ekzekutimit
1	4	118.00
1	8	116.00
2	4	108.00
2	8	105.00
4	4	100.00
4	8	100.00
8	4	88.00
8	8	86.00
16	4	86.00
16	8	86.00

Fig.11 Koha e ekzekutimit në klaster me procesorë 3,2GHz për Eliminimin e Gausit



Paraqitje të valës ujore sipas koficientëve të deformimit

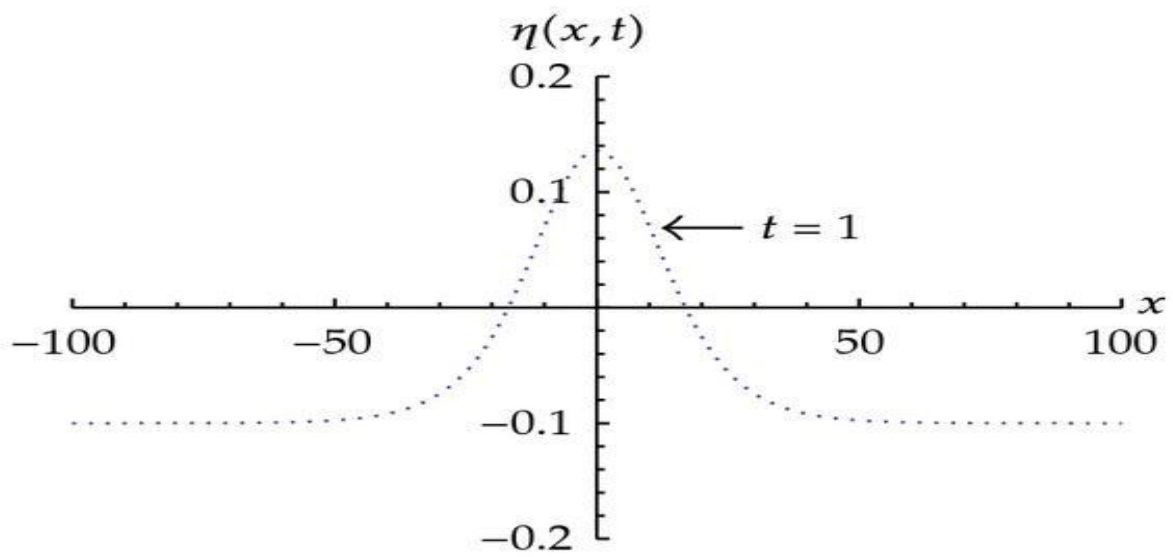


Fig.12 Vala ujore në $t=1$.

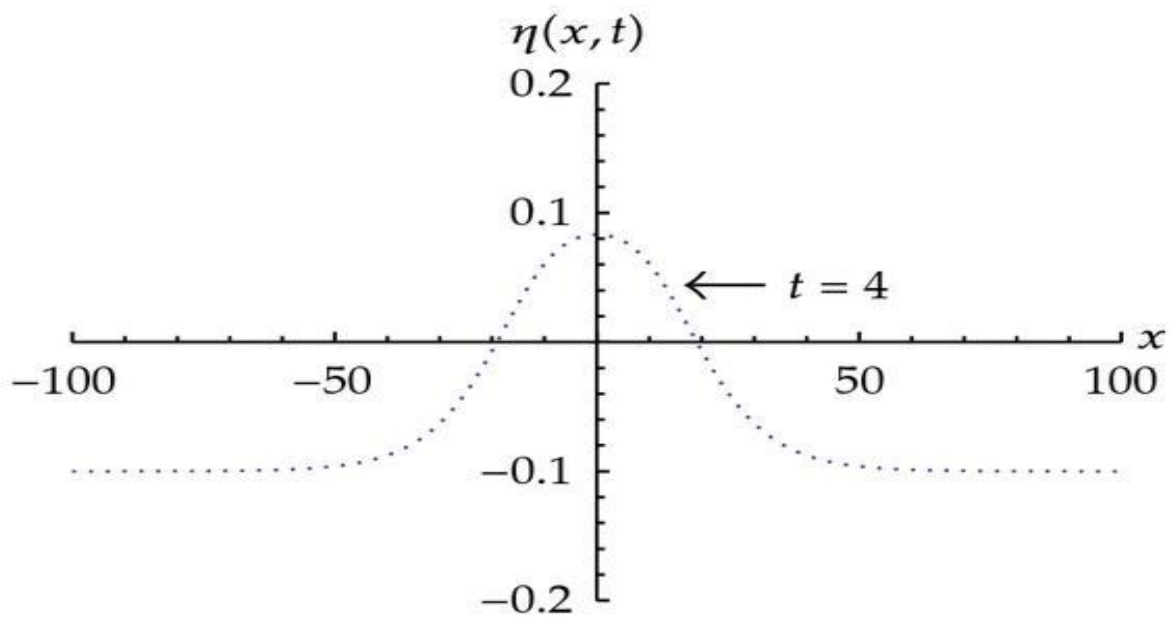


Fig.13 Vala ujore në $t=4$.

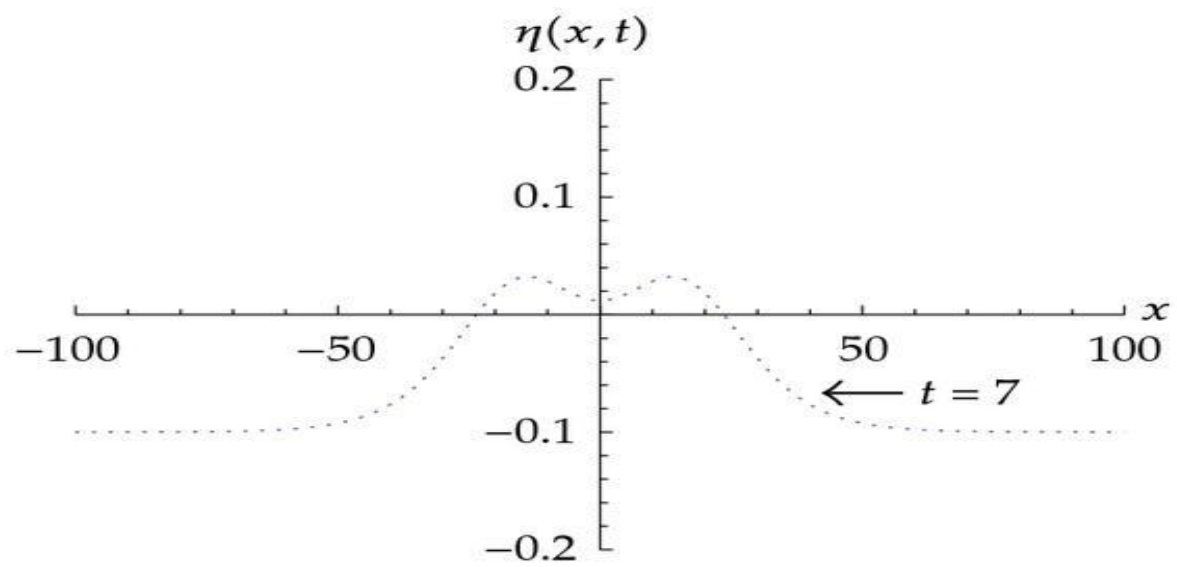


Fig.14 Vala ujore në $t=7$.

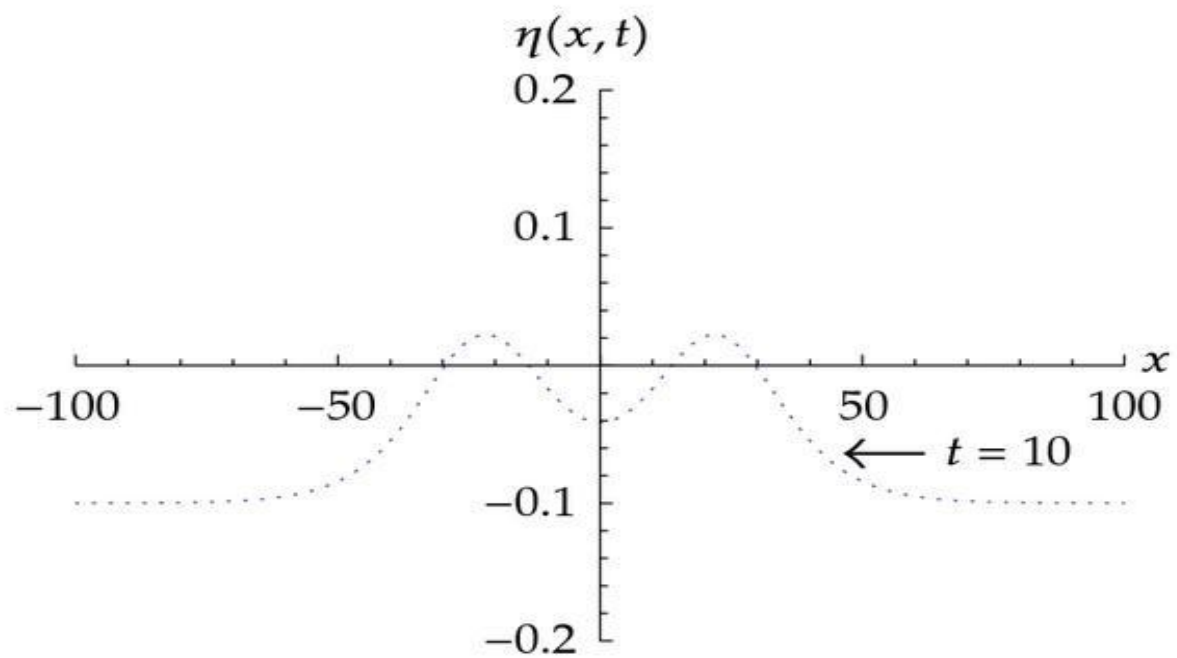


Fig.15 Vala ujore në $t=10$.

Paraqitja e valës ujore gjatë deformimit me koeficientet e deformimit perkatës në planin tri dimensional duke përdorur.

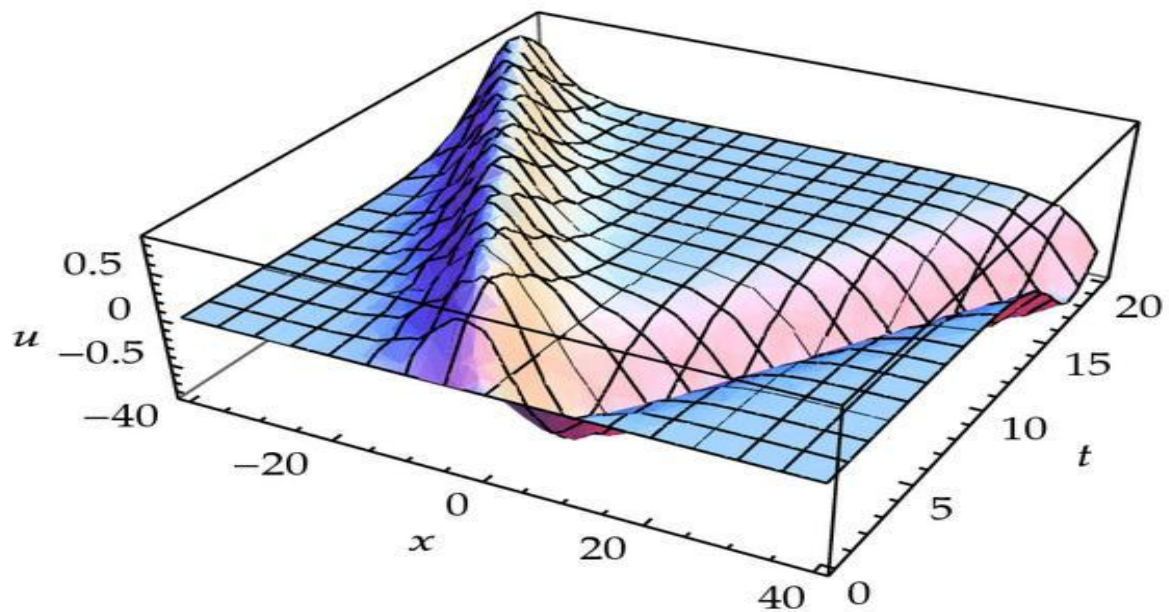


Fig.16 Shpejtësia horizontale e valës

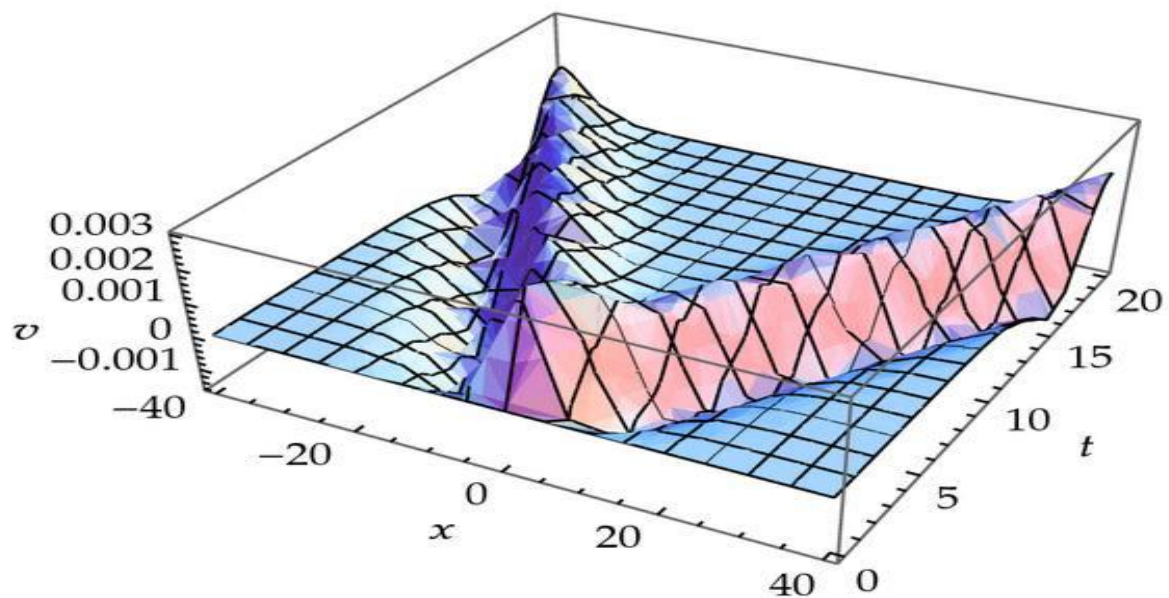


Fig.17 Shpejtësia vertikale e valës

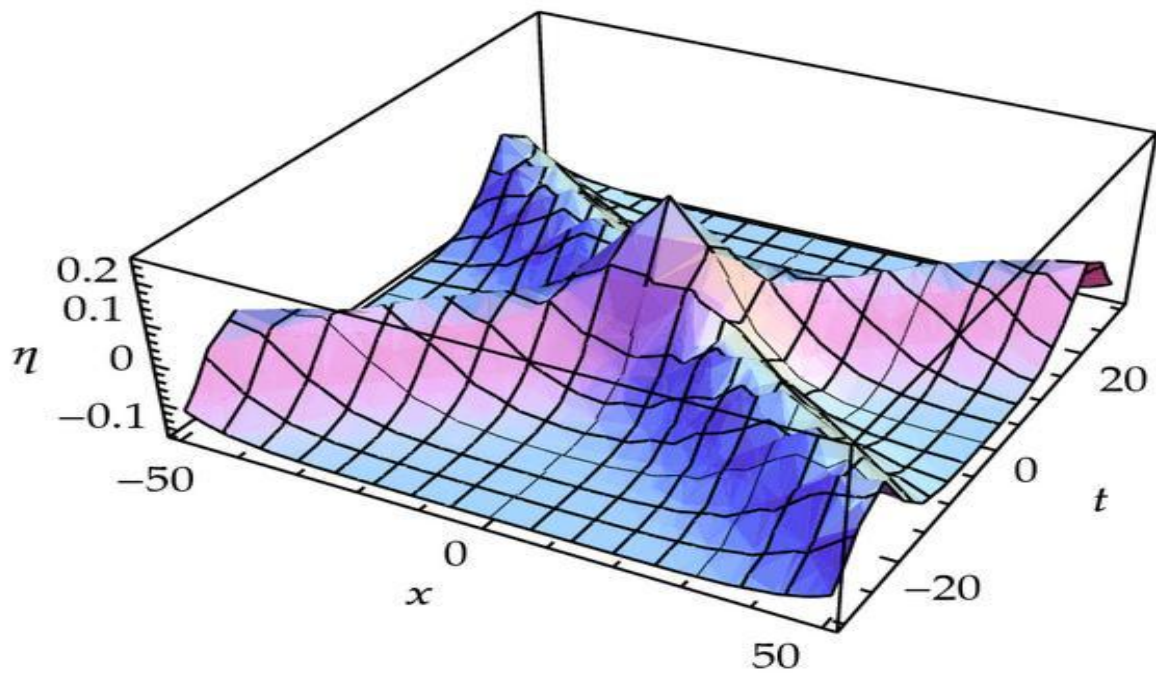


Fig.18 Vala ujore në koeficientin e deformimit 0.4

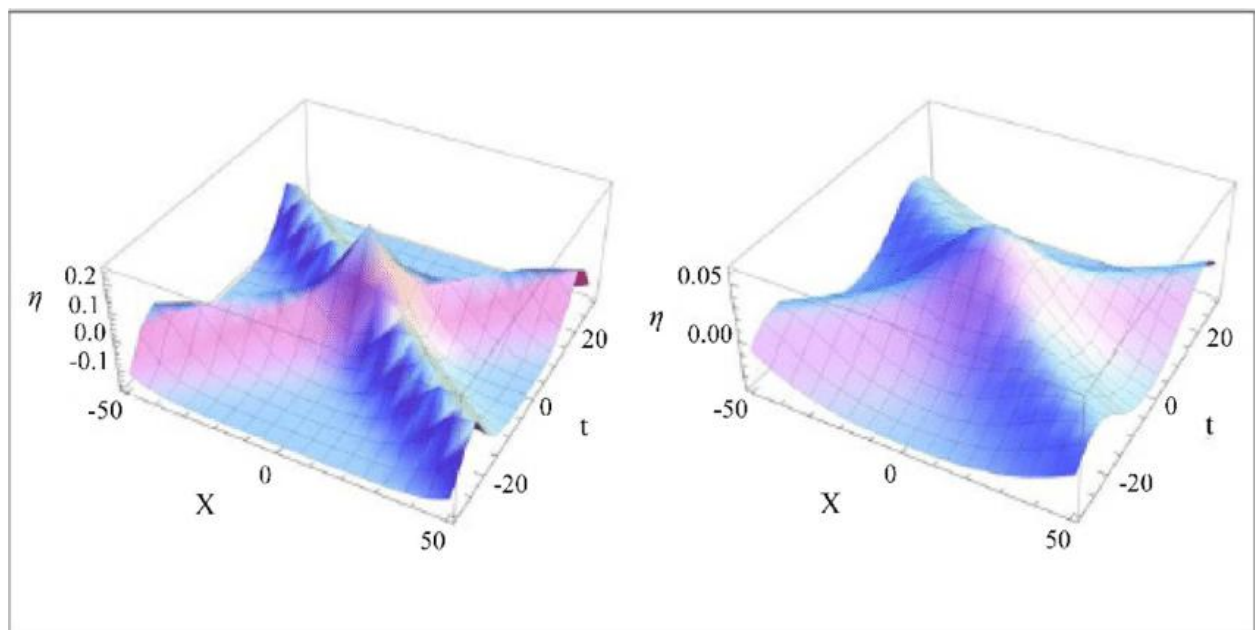


Fig.19 Krahasim i valës me koeficientin e deformimit 0.4 (majtas) dhe 0.2 (djathtas)

4.5 Rezultate numerike për valët e ujit të cekët paraqitur në 1D dhe 2D

Marrim ekuacionet

$$h_t + (hu)_x = 0,$$

$$(hu)_t + (hu^2 + g/2h^2)_x = -ghZ'$$

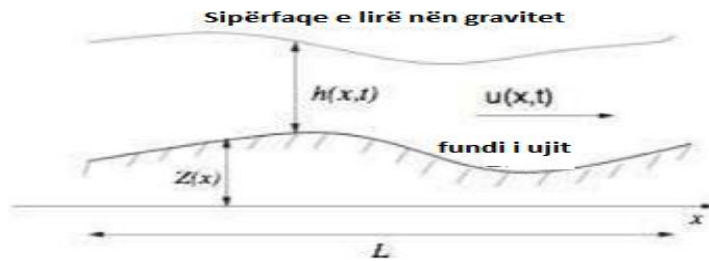


Fig.20 Paraqitje e valës së ujit të cekët

- Problemi i shuarjes së valës në $Z \equiv 0$ dhe $Z \neq 0$

Gjatësia e valës së studiuar $L = 20m$. Një kulm i valës ndodh në $x_0 = 10m$ dhe në kohën $t = 0$ vala thyhet. Ne llogarisim zgjidhjen për kohën $T = 50s$ me kushtet kufitare:

$$u(x, 0) = 0, \quad h(x, 0) = \{h_1 \text{ për } x \leq 10 \text{ dhe } h_0 \text{ për } x > 10, \text{ me } h_1 > h_0\}.$$

Rrjedha e ujit përbëhet nga një valë përplasëse pas thyerjes dhe nga një valë e qetë në fundin e detit. Thellësia e valës $h_1 = 1 m$ dhe h_0 ndryshon sipas problemit.

$Pika\ kritike = 0.5m$, $\Delta x = 2m$, $c_1 = 5$, $c_2 = 12$, $\varepsilon = 0,2$

a) rrjedha nën pikën kritike $h_0/h_1 > 0.5$

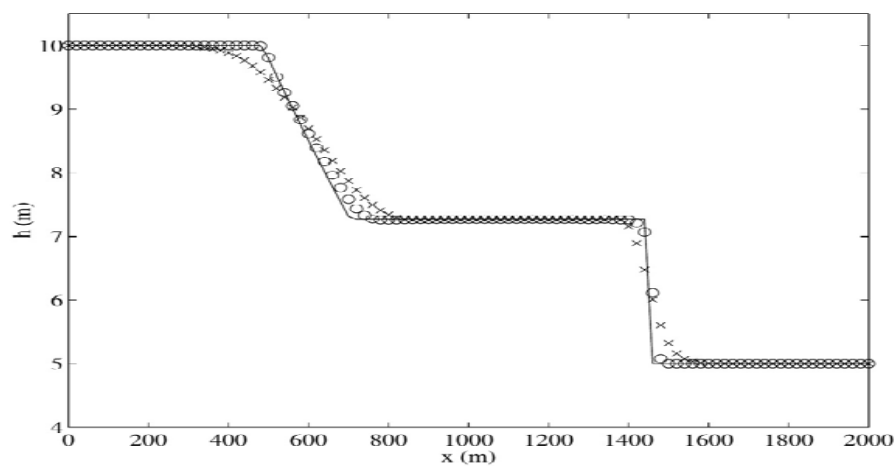


Fig.21 Paraqitje e valës nën pikën kritike $h_0/h_1 > 0.5$

b) $h_0/h_1 < 0.5$: rrjedha e sipërme nën pikën kritike, rrjedha e poshtme nën pikën kritike

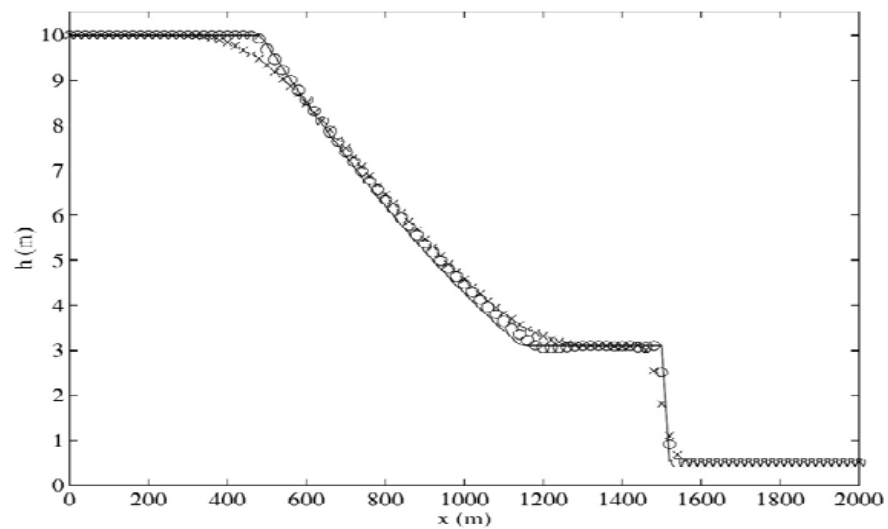


Fig.22 Paraqitje e valës nën pikën kritike $h_0/h_1 < 0.5$

c) $h_0/h_1 \ll 0.5$: vala në maksimumin e pikës kritike

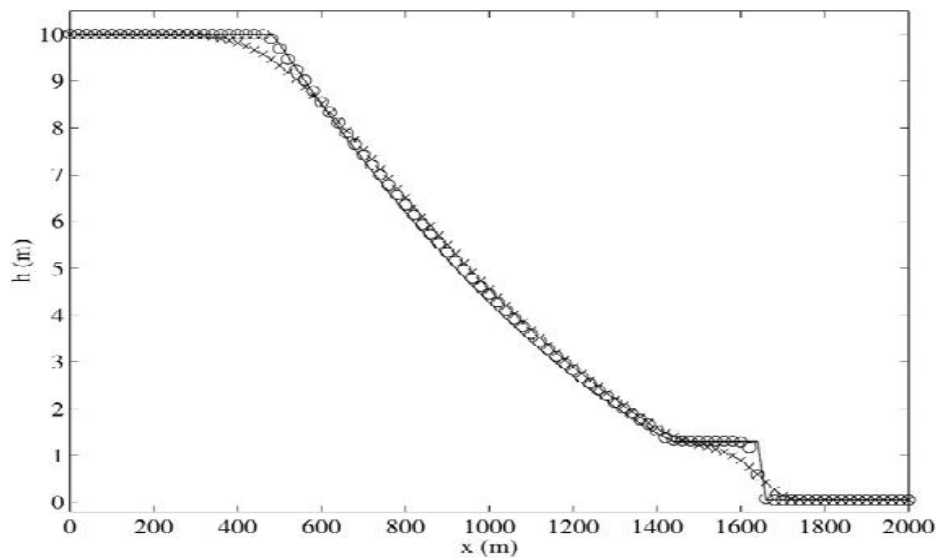


Fig.23 Paraqitje e valës nën pikën kritike $h_0/h_1 \ll 0.5$

- Problemi gjatë turbullimit të valës.

Ne llogarisim problemin në $T = 40s$ $\Delta x = 1m$, $c_1 = 0,8$, $c_2 = 0,6$ dhe ε koeficient deformimi i ndryshueshëm

a. lartësia (h) e valës së ujit,

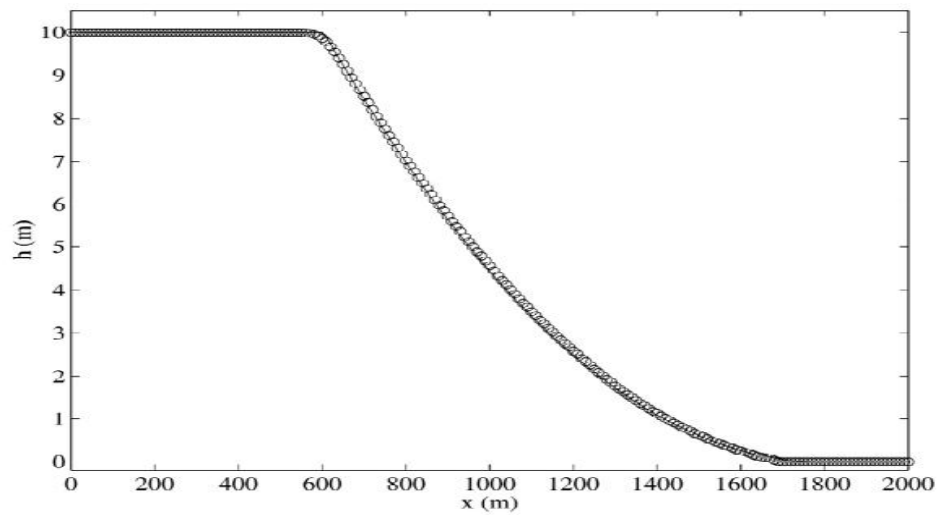


Fig.24 Paraqitje e lartësisë së valës

b. fuksi (q) i valës së thyer,

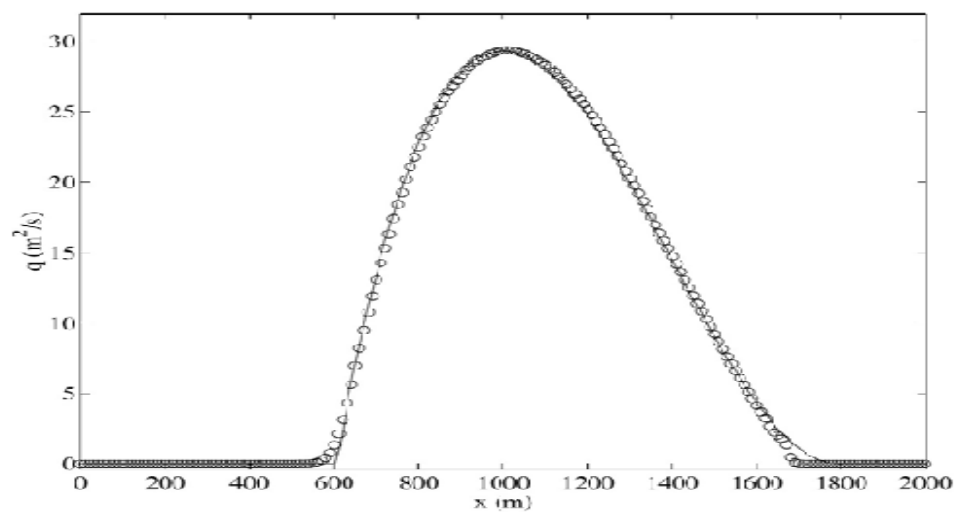


Fig.25 Paraqitje e fuksit të valës së thyer

c. Shpejtësia (u) gjatë thyerjes së valës

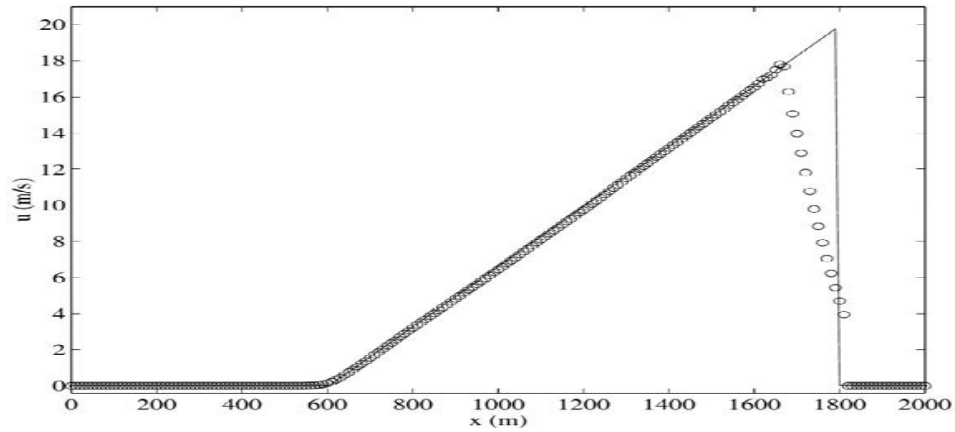


Fig.26 Paraqitje e shpejtësisë gjatë thyerjes së valës

- Gjëndjet e valës së turbulluar

Në varësi të kushteve kufitare vala e detit mund të jetë në fazat: para pikës kritike, në pikën kritike, me thyerje dhe shuarjen e valës

$$\Delta x = 0.125m, T = 200s, \varepsilon = 0.2, c_1 = 5, c_2 = 7$$

$$u(x, 0) = 0, \forall x \in R,$$

$$h(x, 0) + Z(x) = H_0, \forall x \in R,$$

ku H_0 shtresa e poshtme e ujit. Vala nën pikën kritike: fluksi $q = 4.42m^2/s$, $H_0 = 1m$

a. Niveli i ujit të valës në pikën kritike

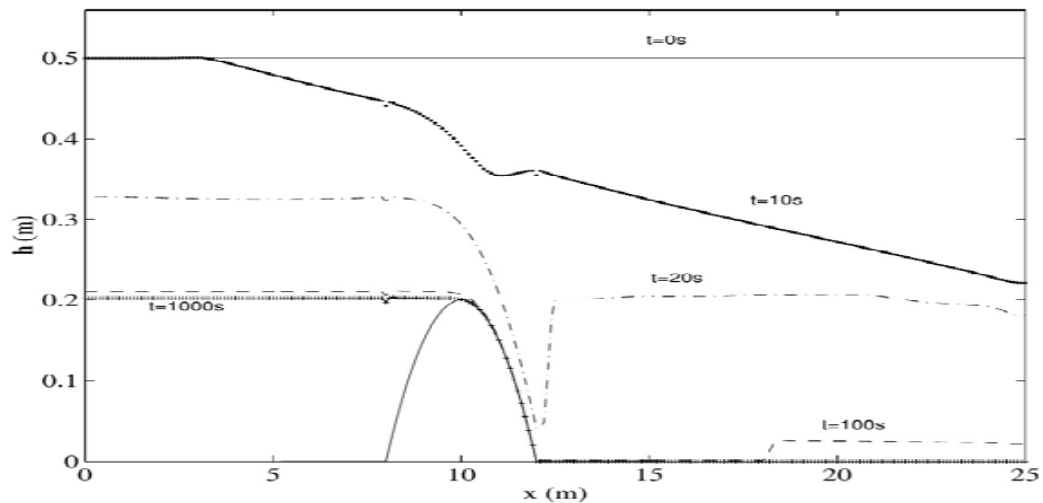


Fig.27 Paraqitje e nivelit të ujit të valës në pikën kritike

c. *Fluksi i valës gjatë shuarjes*

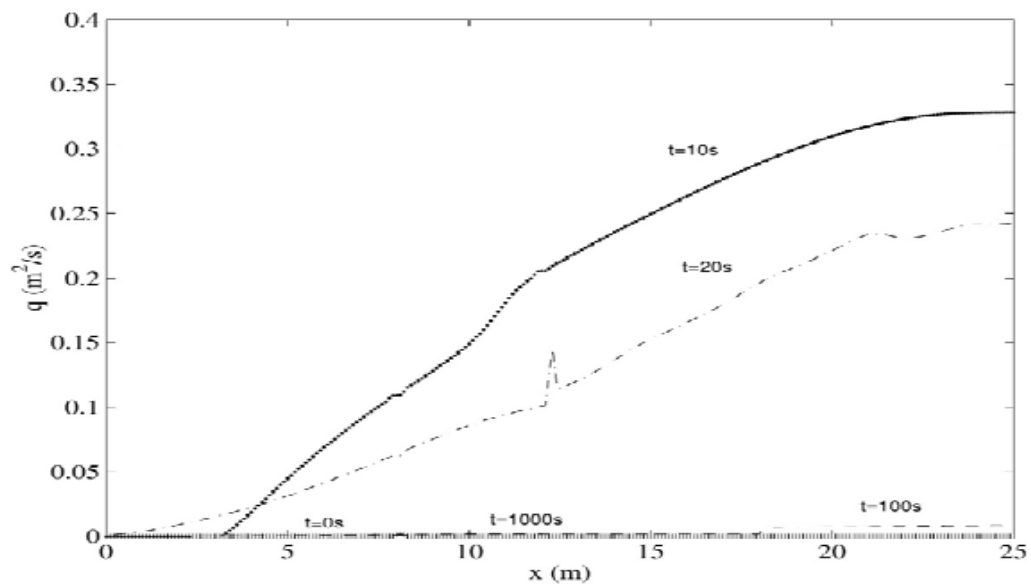


Fig.28 Paraqitje e fluksit të ujit të valës në pikën kritike

- **Problemi i thyerjes së valës paraqitur në 2D**

Të dhënat $h_u = 10\text{m}$ dhe rastet $h_d = 5; 0.1; 0\text{m}$. Gjat. $10\text{m} \times 10\text{m}$, 0.41×0.41 rrjeta katrore. Kushtet kufitare : $x = 0$ dhe $x = 10\text{m}$

$\varepsilon = 10^{-6}$ dhe $c_1 = 10, c_2 = 6, c_3 = 11, d_1 = 10, d_2 = 5, d_3 = 11$. $T = 7.2\text{s}$

a. *Rasti $h_d = 5\text{m}$*

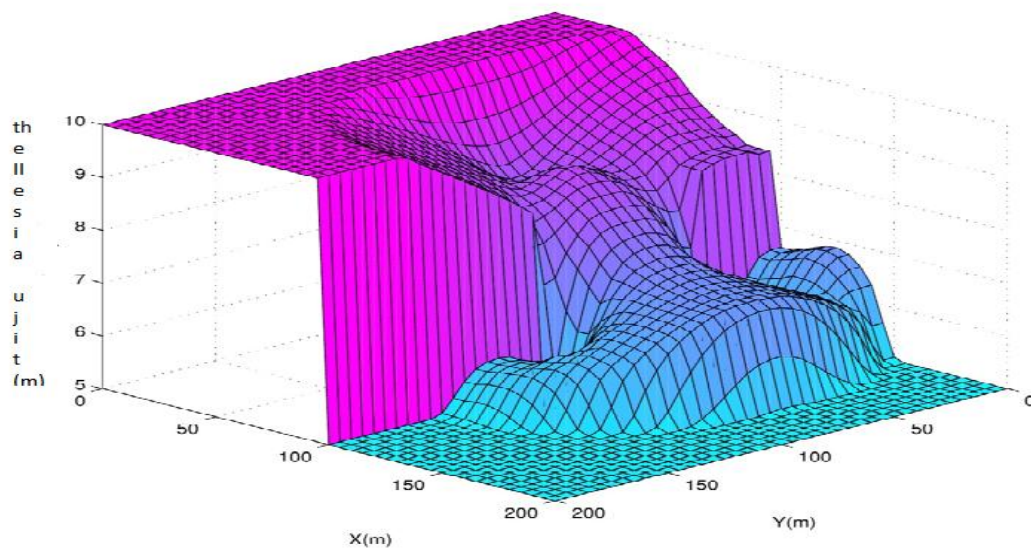


Fig.29 Thyerja e valës në $h_d = 5\text{ m}$

b. Rasti $h_d = 0.1m$

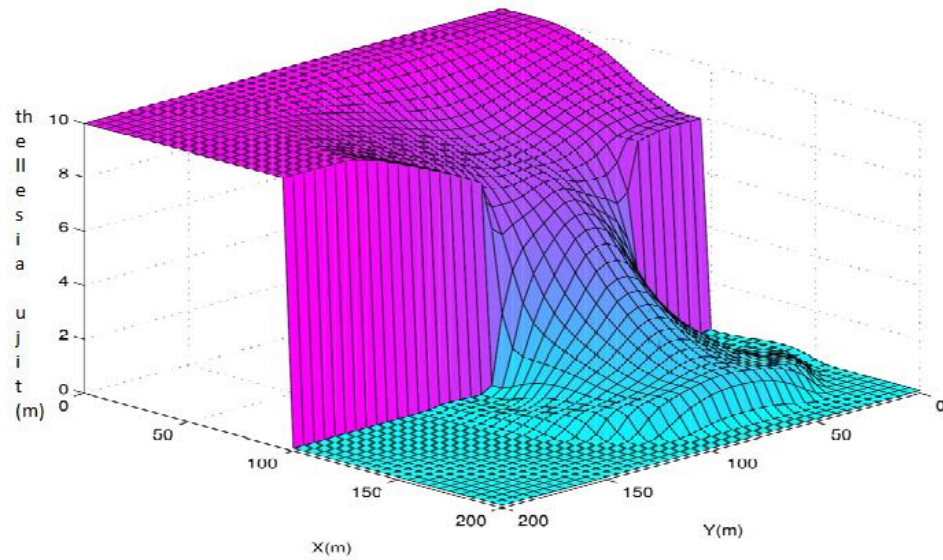


Fig.30 Thyerja e valës në $h_d = 0.1 m$

c. Rasti $h_d = 0m$

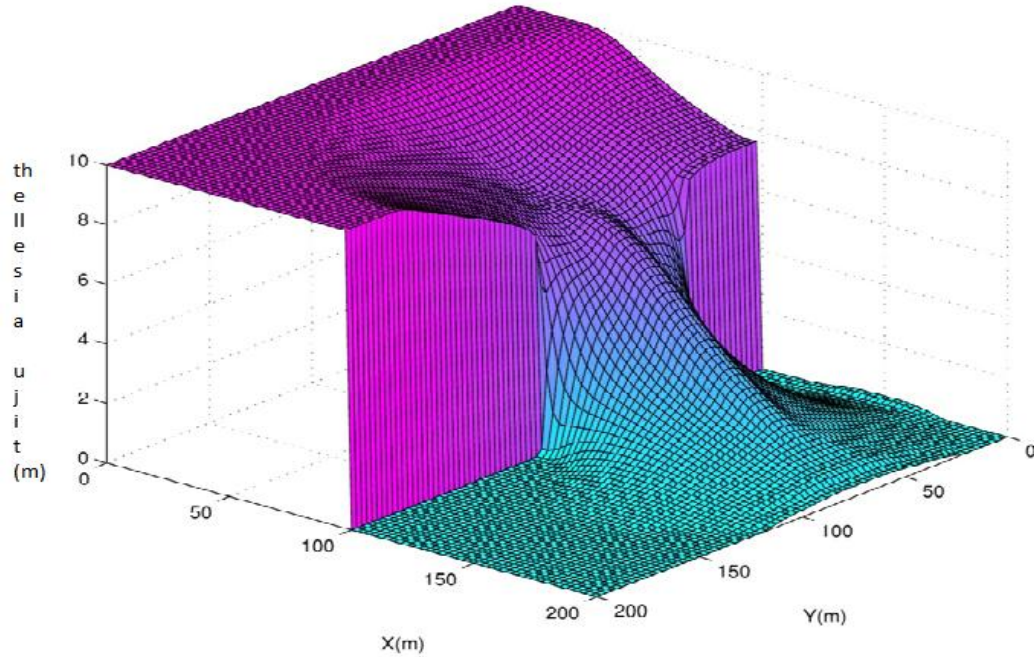


Fig.31 Thyerja e valës në $h_d = 0 m$

PËRFUNDIME DHE REKOMANDIME

Ekuacionet e valës së ujit të cekët formojnë një sistem jolinear. Natyra jo lineare e këtij sistemi ka ekuacione të cilat shpesh pranojnë zgjidhje jo të vazhdueshme. Ne trajtuam problemin e vlerës fillestare për një klasë ekuacionesh të valës jolineare të rendit më të lartë me terma logaritmikë. Trajtimi u bë në një bashkësi të kufizuar $\Omega \subset R^n$, ($n \geq 1$) e kufizuar me kufi të butë $\partial\Omega$, $0 < k < 1$, k është një parametër i vogël dhe $P = (-\Delta)^m$, m është një numër natyral ($m \geq 1$). Në teoremën themelore ne merremi me vlerësimin e shuarjes së energjisë.

Trajtuam ekuacionet e tipit Camassa-Holm. Përshkrimet Camassa të rrjedhës së ujit të cekët mund të përdoren në ujra pak të thellë dhe rrjedha që ndryshojnë me shpejtësi. Me fjalë të tjera valët e ujit të cekët që janë përshkruar vetëm nga ekuacione që kanë jolinearitet logaritmik [Hajrulla; Bezati; Hoxha].

Për qëllime të studimit numerik, është e rëndësishme të kemi një teori të kënaqshme të egzistencës së zgjidhjeve, ashtu si dhe veçantia dhe varësia e vazhdueshme në lidhje me të dhënat fillestare. Pikërisht në punën tonë janë dhënë metodat për përafrimin e zgjidhjeve dhe konkretisht është punuar me përafrimin e zgjidhjes me një polinom si metodë shumë efikase numerike. Ky lloj i problemit lind kur situatat modeluese përfshijnë ndërveprime të komplikuar. Pikërisht zberthimi Cholesky gjatë llogaritjeve na i lehtëson këtë punë.

Problemet e turbullimit u trajtuan nepermjet ekuacioneve që varen nga parametër i vogël pozitiv, ε . Trajtuam zgjidhjet e problemit të reagimit të turbullimit të ujit në disa raste dhe ndërtuam grafikët në problemet e shformimit të valës ujore nepermjet platformës Matlab.

Mathematica është një nga sistemet e përgjithshme të llogaritjes. Ky soft na lejoi të kryejmë njehsimet kryesore dhe ishte mjaft i përshtatshëm. Meqënëse *Matematika* trajton të gjitha shprehjet në mënyrë simbolike, një avantazh i madh që ai ka është aftësia për të kryer llogaritjet dhe zëvendësimet me lehtësi.

MATLAB na ka ndihmuar të kryejmë një pjesë të njehsimeve dhe të realizojmë vizualizimet. P.sh. me anë të funksionit *plot* ne ndërtuam grafikët e duhur në problemet e shformimit të valës ujore në planin dy dimensional. Gjithashtu ne paraqitëm valën ujore gjatë deformimit me koeficientet e deformimit perkatës në planin tri dimensional duke përdorur *surf*, *plot3*.

Edhe platforma OpenMP është përdorur gjerësisht në njehsime dhe mund të përdoret nga internet pa pagesë dhe është praktike për njehsimet në paralel. Algoritmet tanë kanë një performancë më të mirë kur zbatohen në platformën OpenMP. Siç shihet nga tabelat koha e ekzekutimit në OpenMP është më e shkurtër se ekzekutimi i të njëjtit algoritëm në C++.

Shumë modele sigurojnë përafrimin më të mirë të shpejtësisë së fazës për numër të vogël valësh që mund të përftohet me ekuacione të rendit të tretë.

Disa probleme praktike kanë nevojë për metodat numerike. Metodën e volumit të fundëm dhe metodën e elementit të fundëm janë dy teknikat kryesore të përdorura për të simuluar rrjedhën e ujit të cekët. Kjo klasë e ekuacioneve mund të përdoret për të modeluar një varg të rrjedhave, por është më e vështirë për tu zgjidhur sesa ekuacionet e valës së ujit të cekët.

Krahasimi i metodave

Pamë se metoda e përafrimit me një polinom është një nga metodat të cilat janë përdorur për të marrë ekuacionet e valës ujore. Ajo është relativisht e shkurtër në llogaritjet matematikore dhe më efektive.

Operatorët e tjerë të përdorur në modele të ndryshme japin rrugë vërtetimi relativisht të gjata kur krahasohen me operatorin e Laplasit që ne përdorim.

Nuk kërkohet linearizim; metoda është shumë premtuese për zgjidhjen dhe mjaft aplikime të ekuacioneve diferenciale jolineare.

Disa metoda përafrimi nuk kërkojnë parametra të vegjël të cilët nevojiten në metodën e turbullimit. Por metoda jonë është e thjeshtë në përdorim, edhe pse përdor parametrin e deformimit të valës.

Rekomandime

Në të ardhmen e afërt, ne mund të paraqesim disa modele të përafrimit të zgjidhjeve për ekuacione lineare që përshkruajnë shpërndarjen e valëve ujore. Disa nga këto modele janë të njohura si modele të përdorura në ekuacionet KdV, BBM, Burger-Poisson.

Një drejtim tjetër studimi është edhe përafrimi i zgjidhjeve për valët e ngurtësuara ujore, d.m.th. valët të cilave nuk u ndryshon amplituda gjatë lëvizjes.

Një përafrim për ekuacionet jolineare të valës ujore është një tjetër ide për të ardhmen ku ne përdorim dy strategji të ndryshme të përafrimit gjatë shpërbërjes së valës. Strategjitë janë të njohura si përafrimi Pade I dhe përafrimi Pade II. Duke përdorur këto strategji ne marrim metodat numerike të cilat janë shumë të rëndësishme në teorinë e përafrimit.

Rekomandohet edhe përdorimi i metodës Runge-Kutta në modelin dy dimensional të ujit të cekët. Ky model zgjeron një skemë eksplicite të diferencës kohore Runge-Kutta të rendit të tretë në një skemë gjysmë implicite Runge-Kutta. Sigurisht skema Runge-Kutta vazhdon të përdoret skemën eksplicite Runge-Kutta të rendit të tretë për termat jolineare duke përfshirë rrjedhat horizontale.

REFERENCAT

- [1] Apel JR et al (2007) Internal solitons in the ocean and their effect on underwater sound. *J Acoust Soc Am* 121:695-722
- [2] Camassa R, Holm D (1994) An new integrable shallow water equation. *Adv Appl Mech* 31:1-33
- [3] Craik ADD (2004) The origins of water wave theory. *Annu Rev Fluid Mech* 36:1-28
- [4] Craik ADD (2005) George Gabriel Stokes and water wave theory. *Annu Rev Fluid Mech* 37:23-42
- [5] Darrigol O (2003) The spirited horse, the engineer, and the mathematician: Water waves in nineteenth-century hydrodynamics. *Arch Hist Exact Sci* 58:21-95
- [6] Filippov AT (2000) The versatile soliton. Birkhäuser-Verlag, Basel, Switzerland
- [7] Garrett C, Munk W (1979) Internal waves in the ocean. *Annu Rev Fluid Mech* 11: 339-369
- [8] Grimshaw R (2005) Korteweg-de Vries equation. In: Grimshaw R (ed) *Nonlinear waves in fluids: Recent advances and modern applications*. Springer-Verlag, Berlin, pp 1-28
- [9] Hammack JL, Segur H (1974) The Korteweg-de Vries equation and water waves, part 2. Comparison with experiments. *J Fluid Mech* 65:289-314
- [10] Segur H (2007) Waves in shallow water, with emphasis on the tsunami of 2004. In: Kundu A (ed) *Tsunami and nonlinear waves*, Springer-Verlag, Berlin
- [11] .L. Bona, R. Scott: Solutions of the Korteweg-de Vries equation in fractional order Sobolev spaces.*DukeMath.J.*43:67-79(1976).
- [12] Constantin A., Escher J.: Global weak solutions for a shallow water equation. *Indiana Univ. Math. J.*47:1500-1511(1998)
- [13] A. Degasperis, D. Holm, A. N.W. Hone: Integrable and non-integrable equations with peakons.in: *Nonlinear Physics: Theory and Experiment*, vol. II, Gallipoli,2002. *World Scientific, RiverEdge,NJ*. (2003)
- [14] J.L. Bona, R. Smith: The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 278: 555-601(1975) *IJNS homepage:*<http://www.nonlinearscience.org.uk/>
- [15] R. Camassa, D. Holm: An integrable shallow water equation with peaked solutions. *hys. Rev. Lett.* 71: 1661-1664(1993)

- [16] J. R. S. Johnson. Camassa-Holm, Korteweg-de Vries and related models for water waves. *J. Fluid Mech.*, 455:63-82, 2002
- [17] Ping Zhang: Weak solutions to a nonlinear variational wave equation and some related problems. *Applications of Mathematics*. 4: 287-306(2006)
- [18] Lixin Tian, Guilong Gui, Yue Liu: On the Cauchy problem for the generalized shallow water wave equation. *J. Diff. Equ.* 265(7): 1838-1852(2008)
- [19] Coclite G.M., Holden H., Karlsen K.H.: Global weak solutions to a generalized hyperelastic-rod wave equation. *SIAM J. Math. Anal.* 37: 1044-1069(2005)
- [20] Constantin A., Escher J.: Global weak solutions for a shallow water equation. *Indiana Univ. Math. J.* 47: 1527-1545(1998)
- [20] Constantin A., Escher J.: Global weak solutions for a shallow water equation. *Indiana Univ. Math. J.* 47: 1527-1545(1998)
- [21] Enzo Vitillaro. Global existence for the wave equation with nonlinear boundary damping and source terms. *J. Differential Equations* , 186(1):259-298, 2002.
- [22] Enzo Vitillaro. A potential well theory for the wave equation with nonlinear source and boundary damping terms. *Glasg. Math. J.*, 44(3):375-395, 2002.
- [23] Gorka P., Logarithmic Klein-Gordon equation. *Acta Phys. Polon. B*, 40(1) (2009), 59-66.
- [24] Ping Zhang, Yuxi Zheng: Existence and uniqueness of solutions to an asymptotic equation arising from a variational wave equation with general data. *Arch. Ration Anal.* 155: 49-83(2000)
- [25] Gross L., Logarithmic Sobolev inequalities. *Amer. J. Math.*, **97**(4) (1975), 1061-1083.
- [26] Hiramatsu, T., Kawasaki, M., Takahashi, F.: Numerical study of Q-ball formation in gravity mediation 123 (2) (2011), (179-183).
- [27] Han X. S., Global existence of weak solutions for a logarithmic wave equation arising from Q-ball dynamics. *Bull. Korean Math. Soc.*, 50(1) (2013), 275-283.
- [28] Chen H., Luo P. and Liu G.W., Global solution and blow-up of a semilinear heat equation. with logarithmic nonlinearity. *J. Math. Anal. Appl.*, **422** (1) (2015), 84-98.
- [29] Benaissa A., Messaoudi S., Exponential decay of solutions of a non-linearly damped wave equation. *Nonlinear Differential Equations Appl.*, 12(4) (2005), 391-399
- [30] Gerbi S., Said-Houari B., Exponential decay for solutions to semilinear damped wave equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems -Series S*, **5**(3) (2012), 559-566.

- [31] L. Fraccarollo, H. Capart, and Y. Zech. A Godunov method for the computation of erosional shallow water transients. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 41:951–966, 2003.
- [32] Lorenzo Pareschi, Gabriella Puppo, and Giovanni Russo. Central runge–kutta schemes for conservation laws. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(3):979–999, 2005.
- [33] R. Camassa, Characteristics and the initial value problem of a completely integrable shallow water equation, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 3 (2003), 115-139
- [34] A. Bressan and A. Constantin. Global conservative solutions of the Camassa-Holm equation. Preprint, Submitted, 2005.
- [35] R. Camassa, J. Huang, and L. Lee, Integral and integrable algorithms for a nonlinear shallow-water wave equation, Preprint Submitted (2004)
- [36] R. Camassa and D. D. Holm. An integrable shallow water equation with peaked solitons. *Phys. Rev. Lett.*, 71(11):1661{1664, 1993.
- [37] R. Camassa, D. D. Holm, and J. Hyman. A new integrable shallow water equation. *Adv. Appl. Mech.*, 31:1{33, 1994.
- [38] A. Constantin and J. Escher. Global existence and blow-up for a shallow water equation. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 26(2):303{328, 1998.
- [39] G. Rodr'iguez-Blanco, On the Cauchy problem for the Camassa-Holm equation, *Nonlinear Anal.*, 46 (2001), 309-327
- [40] A. Constantin and J. Escher, Global existence and blow-up for a shallow water equation, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 26 (1998), 303-328
- [41] L. Bona, R. Scott: Solutions of the Korteweg-de Vries equation in fractional order Sobolev spaces. *Duke Math. J.*.43:67-79(1976).
- [42] Constantin A., Escher J.: Global weak solutions for a shallow water equation. *Indiana Univ. Math. J.*.47:1500-1511(1998)
- [43] A. Degasperis, D. Holm, A. N.W. Hone: Integrable and non-integrable equations with peakons. in: *Nonlinear Physics: Theory and Experiment*, vol. II, Gallipoli, 2002. *World Scientific, River Edge, NJ.* (2003)
- [44] J.L. Bona, R. Smith: The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*. 278: 555-601(1975) *IJNS homepage:*<http://www.nonlinearscience.org.uk/>
- [45] R. Camassa, D. Holm: An integrable shallow water equation with peaked solutions. *hys. Rev. Lett.* 71: 1661-1664(1993)

- [46] J. R. S. Johnson. Camassa-Holm, Korteweg-de Vries and related models for water waves. *J. Fluid Mech.*, 455:63{82, 2002
- [47] E. Pişkin, Growth of Solutions with Positive Initial Energy to Systems of Nonlinear Wave Equations with Damping and Source Terms, *Advances in Mathematical Physics*, 2015 (SCI).
- [48] Constantin A., Escher J.: Global weak solutions for a shallow water equation. *Indiana Univ. Math. J.*. 47: 1527-1545(1998)
- [49] Constantin A., Escher J.: Global weak solutions for a shallow water equation. *Indiana Univ. Math. J.*. 47: 1527-1545(1998)
- [50] Danchin R.: A note on well-posedness for Camassa-Holm equation. *J. Diff.equ.*192 in: *Lecture Notes in Math.*, 448: 25-70(1975) 429-444(2003) W.N. Everitt (Ed.). *Differential Equations*
- [51] Hiramatsu T., Kawasaki M. and Takahashi F., Numerical study of Q-ball formation in gravity mediation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(6) (2010), 001-008.
- [52] P. Gorka, Logarithmic Klein-Gordon equation, *Acta Phys. Polon. B* 40 (2009), no. 1, 59–66.
- [53] Gorka P., Logarithmic Klein-Gordon equation. *Acta Phys. Polon. B*, 40(1) (2009), 59-66.
- [64] Bialynicki-Birula I, Mycielski J, Nonlinear wave mechanics. *Ann. Physics*, 100(1-2) (1976), 62-93.
- [55] Gross L., Logarithmic Sobolev inequalities. *Amer. J. Math.*, **97**(4) (1975), 1061-1083.
- [56] Enzo Vitillaro. Global existence for the wave equation with nonlinear boundary damping and source terms. *J. Differential Equations* , 186(1):259–298, 2002.
- [57] W. Krolikowski, D. Edmundson, and O. Bang, Unified model for partially coherent solitons in logarithmically nonlinear media, *Phys. Rev. E* 61 (2000), 3122–3126.
- [58] T. Hiramatsu, M. Kawasaki, and F. Takahashi, Numerical study of Q-ball formation in gravity mediation, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2010 (2010), no. 6, 008.
- [59] L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities, *Amer. J. Math.* 97 (1975), no. 4, 1061–1083.
- [60] K. Enqvist and J. McDonald, Q-balls and baryogenesis in the MSSM, *Phys. Lett. B* 425 (1998), 309–321.
- [61] A. Bressan and A. Constantin. Global conservative solutions of the Camassa-Holm equation. Preprint. Submitted, 2005.
- [62] Constantin A., Escher J.: Global weak sols for a shallow water eq. *Indiana Univ. Math...*47:1500-1511(1998)

- [63] A. Degasperis, D. Holm, A. N.W. Hone: Integrable and non-integrable equations with peakons. Theory and Experiment, vol. II, Gallipoli, 2002. *World Scientific, River Edge, NJ.* (2003)
- [64] R. Camassa and D. D. Holm. An integrable shallow water equation with peaked solitons. *Phys. Rev. Lett.*, 71(11):1661{1664, 1993.
- [65] R. Camassa, D. D. Holm, and J. Hyman. A new integrable shallow water equation. *Adv. Appl. Mech.*, 33, 1994.
- [66] E. Wahl'en. On the peakon-antipeakon interaction. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal*
- [67] R. S. Johnson. Camassa-Holm, Korteweg-de Vries and related models for water waves. *J. Fluid Mech.*, 455:63-82, 2002.
- [68] A. Constantin and J. Escher. Global existence and blow-up for a shallow water equation. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 26(2):303{328, 1998.
- [69] A. Constantin and L. Molinet. Global weak solutions for a shallow water equation. *Comm. Math. Phys.*, 211(1):45{61, 2000.
- [70] M. Fonte. Conservative solution of the Camassa-Holm equation on the real line. *arXiv:math.AP/0511549*, 3 2005.
- [71] Milder, D.M. 1977. A note on: 'On Hamilton's principle for surface waves'. *J. Fluid Mech.* 83(1), 159–161.
- [72] Miles, J.W. 1977. On Hamilton's principle for surface waves. *J. Fluid Mech.* 83(1), 153–158.
- [73] Broer, L.J.F. 1974. On the Hamiltonian theory of surface waves. *Appl. Sci. Res.* 29, 430–446.
- [74] Broer, L.J.F. 1975. Approximate equations for long wave equations. *Appl. Sci. Res.* 31 (5), 377–395.
- [75] Broer, L.J.F., van Groesen, E.W.C. & Timmers, J.M.W. 1976. Stable model equations for long water waves. *Appl. Sci. Res.* 32 (6), 619–636.
- [76] F., Renouard, D., and Temperville, A. 1987. "Numerical study of a solitary wave." *J. Fluid Mech.*, 176, 117–134.
- [77] Svendsen, I., Madsen, P., and Hansen, J. 1978. "Wave characteristics in the surf zone." *Proc., 16th Int. Conf. Coastal Eng., ASCE, Reston, Va.* 520–539.

- [78] Helfrich KR, Melville WK (2006) Long nonlinear internal waves. *Annu Rev Fluid Mech* 38:395-425
- [79] Remoissenet M (1999) Waves called solitons: Concepts and experiments, 3rd ed. Springer-Verlag, Berlin 285-315
- [80] Wolfram, S. (1989) Mathematica Addison-Wesley Publishing Company
- [81] Galerkin, B.G (1915), Series solution of some problems in elastic equilibrium of rods. *Vestnik inzhenerov i tekhnikov* 19(7), 897-908
- [82] Hajrulla, S.; Bezati, L.; Hoxha, F. (2017), Higher Order Wave Eq with Logarithmic Source Term. **2017**, 2017120202 (doi: 10.20944/preprints201712.0202.v1).
- [83] Sh.Hajrulla.; F. Hoxha, (2018), Numerical Methods-*International Conference on Math: An Istanbul Meeting for World Mathematics* in Istanbul - ISBN:978-605-67964-1-8 pg. 265-271
- [84] Sh. Hajrulla F. Hoxha,B.L S. H. (2017). Camassa-Holm equation on shallow water wave equation. *International Journal of Scientific Research and Management*, 5(12), 7758-7764.
- [85] Hajrulla, S.; Bezati, L.; Hoxha, F.. Application of Initial Boundary Value on Logarithmic Wave Equation in Dynamics. 2018, 2018010184 (doi: 10.20944/preprints201801.0184.v1)
- [86] Pişkin, E.; Uysal, T.; Hajrulla, S. Exponential Decay of Solutions for a Higher Order Wave Equation with Logarithmic Term (doi: 10.20944/preprints201802.0057.v1)
- [87] Bezati, L., Hajrulla, S., & Hoxha, F. (2018). Finite Volume Methods for Non-Linear Equations. *International Journal of Scientific Research and Management*, 6(02), M-2018
- [88] Hajrulla, Bezati, (2018) A Class of WWE And Approximation of The Solution, *International Conference of Natural Science and Mathematics* ISBN 978-608-217-069-5
- [89] Hajrulla, S., Bezati,L.& Hoxha, F.(2018).Energy of wave and solutions of C-H equation under Lagrangian point of view. *International Journal of Scientific Research and Management*,ISSN (e): 2321-3418||Volume||06||Issue||11||Pages||M-2018-124-131||2018||
- [90] Hajrulla, S., L, B., & F, H. (2018). Water Wave Equation Arising On Logarithmic Quantum Mechanics. *International Journal of Scientific Research and Management*, ISSN (e): 2321-3418 ||Volume||06||Issue||11||Pages||M-2018-132-138||2018||
- [91] A.F. Bennett and B.S. Chua. Open boundary conditions for Lagrangian geophysical fluid dynamics. *Journal of Computational Physics*, 153:418–426, 1999.
- [92] Dommermuth, D.G. & Yue, D.K.P.1987. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves.*J. Fluid Mech.*184, 267–288.

- [93] H. Liu and J. Yan, “A local discontinuous Galerkin method for the Korteweg-de Vries equation with boundary effect,” *Journal of Computational Physics*, vol. 215, no. 1, pp. 197–218, 2006.
- [94] A. M. Abourabla, M. A. Mahmoud, and G. M. Khedr, “Korteweg-de Vries type equations for waves propagating along the interface between air-water,” *Canadian Journal of Physics*, vol. 86, no. 12, pp. 1427–1435, 2008. View at Publisher · View at Google Scholar
- [95] D. J. Benney, “Long non-linear waves in fluid flows,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 45, pp. 52–63, 1966. View at Google Scholar · View at Zentralblatt MATH
- [96] E. Pişkin, Blow up of positive initial-energy solutions for coupled nonlinear wave equations with degenerate damping and source terms, *Boundary Value Problems*, 2015, 2015:43. (SCI)
- [97] Kapçiu R., Kalluçi E., Bushi F., The Parallel Implementation of the Eigenvalue Problem, *IJCRR Volume 1. NO. 1 – 16*, ISSN 352 – 885.
- [98] Kapçiu R., Hoxha F., The Usage of OpenMP Platform in Solving Polynomial Equations, *JMEST Volume 3. Issue*, ISSN 2458 – 9403, 7 July - 2016,.
- [99] Kapçiu R., Hoxha F., Kalluçi E., Parallelized Methods for Solving Polynomial Equations, *IOSR Journals Volume 12. Issue 4, Ver. 2, e – ISSN 2278 – 5728*, Jul – Aug 2016,.
- [100] Kapçiu R., Çullhaj F., Bushati S., A fast method for approximate polynomial roots based on structured matrix computations, *SPNA 2014*
- [101] Kapçiu R., Kalluçi E., Solving the Polynomial Equations Through the Eigenvalue Problem, *Sllovakia nga SK Academic Publishing në bashkëpunim me PRESS dhe BotimeKonferenca.com*, ISBN: 92 – 849 – 0892 – 0, Vol: June 2016.