



UNIVERSITETI "ISMAIL QEMALI" VLORË

DISERTACION

TEMA:

**DISA PROBLEME NE LIDHJE ME
TEORINE E FIJEVE (STRING THEORY)**

Kandidati:

Ndriçim SADIKAJ

Udhëheqës Shkencor:

Prof. Dr. Bilal SHKURTAJ

Për marrjen e gradës shkencore

"Doktor"

në

Matematikë

Vlorë, 2019

DISERTACION

Paraqitur nga
Msc. Ndriçim Sadikaj

Për marrjen e gradës shkencore
"DOKTOR"

TEMA:

DISA PROBLEME NE LIDHJE ME TEORINE E FIJEVE (STRING THEORY)

MBROHET ME DATE / / PARA JURISE:

1.	KRYETAR	
2.	ANETAR (OPONENT)	
3.	ANETAR (OPONENT)	
4.	ANETAR	
5.	ANETAR	

Deklaratë mbi origjinalitetin

Unë i nënshkruari Ndririm Sadikaj, nën përgjegjësinë time, deklaroj se ky punim është shkruar prej meje sipas udhëzimeve të Universitetit “Ismail Qemali” të Vlorës.

Githashtu deklaroj se ky punim nuk është paraqitur apo dorëzuar para ndonjë institucioni tjetër për vlerësim. Punimi nuk përmban material të shkruar nga ndonjë person tjetër, përveç rasteve të cituara dhe të referuara.

Firma:

Data:

Abstract

Teoria e Fijeve është një projekt ambicioz. Ajo pretendohet të jetë një teori gjithëpërfshirëse e universit, duke unifikuar të gjitha forcat e natyrës, duke përfshirë gravitetin, dhe të gjitha grimcat në një kornizë të vetme. Kjo gjë arrihet me supozimin se materia nuk përbëhet nga grimcat elementare, por në vend të tyre kemi pjesë të vogëla të fijeve. Nga ky supozim dalin ligjet e fizikës, si: relativiteti i përgjithshëm [11], elektromagnetizmi [20], teoria kuantike e Yang-Mill-it [5] etj. Veç tyre Teoria e Fijeve nxjerr në pah një mori përbërësish të tjerë, si dimensionet hapësinore shtesë të universit, përtej tre atyre që ne vërejmë etj. Megjithatë, mund të thuhet se Teoria e Fijeve është një teori spekulative. Nuk ka dëshmi eksperimentale që të tregoi se Teoria e Fijeve është përshkrimi i saktë i botës reale si dhe ka disa probleme në Teorinë e Fijeve që janë ende të pazgjidhura. Kjo gjë mund të arrihet në të ardhmen sepse formulimi përfundimtar i Teorisë së Fijeve nuk është shkruajtur akoma.

Duke qenë se në Shqipëri Teoria e Fijeve është një fushë e panjohur, ne në kapitullin e parë japim një hyrje në Teorinë e Fijeve. Aty ne kemi renditur mangësitë e Modelit Standard të fizikës së grimcave elementare dhe kemi treguar pse Teoria e Fijeve është një teori e unifikuar e fizikës.

Në kapitullin e dytë paraqesim ekuacionet e lëvizjes për fijet jorelativiste dhe relativiste. Të frymëzuar nga rasti i pikës materile, do ta përqëndrojmë vëmendjen në gjurmën e lënë nga fija që lëviz në hapësirë-kohë. Ne do të përdorim syprinën e mirëfilltë (e vetë) të kësaj sipërfaqeje si integral veprimi (i ashtuquajtur veprim Nambu-Goto). Gjithashtu do të studjojmë vetinë e ri-parametrizimit të këtij veprimi dhe do të përcaktojmë tensionin e fijos, për të gjetur ekuacionet e lëvizjes. Për fijet e hapura, do të përqëndrohemi në lëvizjen e pikave fikse dhe do të fusim konceptin e D-braneve. Do të shohim se ky veprim është përgjithësim i veprimit relativist të grimcës në Teorinë e Relativitetit.

Në kapitullin e tretë do të diskutojmë për vrimat e zeza në Teorinë e Fijeve. Duke qenë se Teorinë e Fijeve është teori e unifikikuar dhe e përgjithëshme e fizikës atëherë duhet të jetë në gjendje të përshkruajë vrimat e zeza. Vrimat e zeza kanë temperaturë dhe entropi, por këto gjendje janë të vështira për t'u kuptuar në nivelin themelor të mekanikës statistikore. Ne shqyrtojmë karakteristikat themelore të vrimave të zeza dhe përdorim Teorinë e Fijeve për të diskutuar entropinë e tyre.

Në kapitullin e katërt do të shikojmë bashkëveprimet e fijeve në sipërfaqet e Riemann-it. "World-sheet"-et e bashkëveprimit të fijeve të hapura gëzojnë strukturën e sipërfaqeve të Riemann-it, dhe proceset e bashkëveprimit janë parë për të ndërtuar hapësirat module të këtyre sipërfaqeve. Pasqyrimi konformal është përdorur për të siguruar prezantime kanonike për bashkëveprimet e World-sheet-eve.

Formalizimet e ndryshme matematike të teorisë së fijeve kërkojnë më tepër përmasa për hapësirë-kohën se sa ato që kemi vërtetuar deri më sot. Pajtimi i teorisë me vërtetimet kryhet me anën e një procedure matematike që quhet "kompaktifikim". Ky kompaktifikim kryhet zakonisht me anën e të ashtuqujturave manifolde Calabi-Yau. Manifoldet Calabi-Yau studiohen dhe klasifikohen në kapitullin e pestë duke filluar me një-foldet Calabi-Yau, 2-foldet Calabi-Yau dhe duke kaluar në rastin e përgjithshëm n -foldeve Calabi-Yau. Gjithashtu, kemi dhënë disa koncepte statistikore për 3-foldet Calabi-Yau.

Në pjesën e fundit ne kemi trajtuar deformimet e manifoldeve Calabi-Yau, sepse disa manifolde mund të shihen si deformime të disa manifoldeve të tjera Calabi-Yau.

Mirënjohje

Me shumë kënaqësi do të doja të falenderoja të gjithë ata që më mbështetën, konsultuan dhe ndihmuan për realizimit e kësaj teme disertacioni.

Fillimisht dua të falenderoj me respekt dhe mirënjohje të veçantë udhëheqësin tim shkencor, Prof. Dr. Bilal Shkurtaj për mbështetjen e tij të vazhdueshme dhe të pakursyer, këshillat dhe inkurajimin për realizimin e këtij punimi.

Gjithashtu falenderoj të gjithë stafin akademik të Universitetit "Ismail Qemali" të Vlorës, veçanërisht të Departamentit të Matematikës, që më mbështetën për realizimin me sukses të këtij punimi.

Falënderoj gjithashtu dhe familjen time për mbështetjen që më ka dhënë gjatë kësaj periudhe.

Përmbajtja

Abstract	v
Mirënjohje	vii
1 Teoria e Fijeve si një teori unifikimi në fizikë	1
1.1 Matematika - Gjuha e Shkencës	1
1.2 Gjeometria në univers	3
1.2.1 Zhvillimi i gjeometrisë	4
1.2.2 Lakimi i brendshëm dhe sipërfaqet minimale	8
1.3 Dimensionet shtesë	11
1.3.1 Unifikimi në dimensione të larta. Manifoldet Calabi-Yau	14
1.4 Rruga drejt unifikimit në fizikë	17
1.5 Modeli Standard	19
1.6 Teoria e Fijeve (String Theory) si një teori unifikimi në fizikë	22
1.6.1 Madhësia e fijeve	24
1.6.2 Fijet e hapura dhe fijet e mbyllura	25
1.7 Llojet e teorive të fijeve	25
1.7.1 Graviteti	26
1.7.2 Supersimetria	27
2 Ekuacionet e lëvizjes	29
2.1 Ekuacionet e lëvizjes për lëkundjet tërthore	29
2.1.1 Kushtet kufitare dhe kushtet fillestare	31
2.1.2 Frekuenca e lëvizjes transvesale	33
2.1.3 Më shumë përgjithësime për fijet lëkundëse	34
2.2 Veprimi jorelativist	35
2.3 Fijet relativiste	38
2.3.1 Zona funksionale për sipërfaqet hapësinore	38
2.3.2 Riparametrizimi i sipërfaqes	41
2.3.3 Zona funksionale për sipërfaqet e hapësirë-kohës	44
2.4 Veprimi Nambu-Goto	48

2.5	Ekuacioni i lëvizjes, kushtet kufitare, D-branet	49
3	Vrimat e zeza në Teorinë e Fijeve	55
3.1	Vrimat e zeza klasike	55
3.1.1	Horizonti i ngjarjeve - Disku i jashtëm	56
3.1.2	Rrezja Schwarzschild	56
3.1.3	Rrezja Hawking	57
3.2	Vrimat e zeza Schwarzschild	58
3.2.1	Zgjidhja Schwarzschild në koordinata Kruskal-Szekeres	59
3.3	Vrimat e zeza Reissner-Nordström	61
3.4	Vrimat e zeza ekstremale Reissner-Nordström për $D = 4$	62
3.5	Disa koncepte bazë nga mekanika statistike	63
3.6	Temperatura Hagedorn	64
3.7	Termodinamika e vrimave të zeza	65
4	Bashkëveprimet e fijeve në sipërfaqet e Riemann-it	71
4.1	Disa koncepte bazë	71
4.1.1	Sipërfaqet e Riemann-it	72
4.1.2	Pasqyrimet konformale	73
4.1.3	Teorema e pasqyrimeve të Riemann-it	74
4.1.4	Transformimi Schwarz-Christofel	75
4.2	Bashkëveprimet dhe vëzhgimet	76
4.2.1	Bashkëveprimet e fijeve dhe world-sheet-et globale	76
4.2.2	World-sheet-i si sipërfaqe Riemanni	78
4.2.3	Pasqyrimi Schwarz-Christoffel	81
4.3	Bashkëveprimet e fijeve	82
4.3.1	Amplituda e Veneziano-s	84
5	Manifoldet Calabi-Yau	87
5.1	Manifoldet	87
5.1.1	Manifoldet komplekse	88
5.2	Gjeometria Kahler	88
5.3	Manifoldet Calabi-Yau	88
5.4	Klasat Chern dhe Tensori Ricci	88
5.5	Hipoteza e Calabit	90
5.6	Teorema Yau	91
5.7	Hapësirat Calabi-Yau	91
5.8	Numrat Hodge të një n-foldi Calabi-Yau	92

5.9	Diamanti Hodge	93
5.10	Shembuj manifoldesh Calabi-Yau	94
5.10.1	Një-foldet Calabi-Yau	94
5.10.2	Dy-foldet Calabi-Yau	95
	Shembuj jokompakt	95
	Shembuj kompaktë: $T^4, K3$	95
	Numrat Hodge të K3-it	96
5.10.3	Tre-foldet Calabi-Yau	96
	Kuintiku në $\mathbb{CP}^4$	98
5.10.4	CP^2 lokal	102
5.10.5	CP^1 lokal	102
5.10.6	$CP^1 \times CP^1$ lokal.	103
5.10.7	Konifoldi i deformuar	104
5.11	Disa konkluzione statistikore e tre foldeve Calabi-Yau	104
5.11.1	Shpërndarja e $h^{1,1} - h^{1,2}$	105
5.11.2	Shpërndarja e $h^{1,1} + h^{1,2}$	108
5.11.3	n-foldet Calabi-Yau	109
5.12	Deformimet e manifoldeve Calabi-Yau	110
5.13	Matrika e deformimit	111
5.14	Deformimi i three-foldeve Calabi-Yau	113
6	Përfundime dhe rekomandime	115
7	Referime në konferenca dhe botime në revista shkencore	117

Lista e Figurave

1.1	Lloje gjeometrish; sferike, Euklidiane, hiperbolike	3
1.2	Një paraqitje e mundshme e gjeometrisë së universit	4
1.3	Nga lakimi i brendshëm cilindri është i njëjtë me një fletë letre	8
1.4	Postulati i Joseph Plateau-t: Për çdo kurbë të mbyllur mund të gjendet një sipërfaqe minimale.	10
1.5	Sipërfaqet minimale; nëse kufiri përbëhet jo vetëm nga një kurbë e mbyllur, por në disa kurba të mbyllura	10
1.6	Një cilindër dydimensional nga larg duket njëdimensional	12
1.7	Hapësira 5-dimensionale	13
1.8	Hapësira 6-dimensionale	14
1.9	Një shembull tjetër hapësire 6-dimensionale	15
1.10	Një shembull manifoldi Calai-Yau	16
1.11	Manifoldet Calai-Yau në hapësirë	17
1.12	Grimca të ndryshme lindin si vibracione të ndryshme të fijeve	22
1.13	Shëndërrimi $\alpha \rightarrow \beta + \gamma$ majtas si grimcë, djathtas si fije	23
1.14	Fijet e hapura dhe fijet e myllura	25
2.1	Një pjesë e shkurtër nga një fije klasike jo relativiste që lëkundet pingul me lëvizjen.	30
2.2	Majtas: fije me kushte kufitare Dirichlet. Djathtas: fije me kushte kufitare Neumann	32
2.3	Rruga e lëvizjes së një pjesëze gjatë kohës $[t_i, t_f]$	36
2.4	Një rrugë $x(t)$ dhe variacioni i saj $x(t) + \delta x(t)$	37
2.5	World-sheet e një fijeje të hapur (majtas) dhe e një fijeje të mbyllur (djathtas).	38
2.6	Një sipërfaqe hapësinore që shtrihet midis dy unazave.	39
2.7	Majtas: Parametri hapësirë. Djathtas: Sipërfaqja e hapësirës së synuar; një paralelogram ku brinjët e të cilit janë vektorët $d\vec{v}_1$ dhe $d\vec{v}_2$	40
2.8	Majtas: parametrat hapësirë (τ, σ) . Djathtas: Sipërfaqja në hapësirë-kohën e synuar	45

2.9	Majtas: Bashkësia e vektorëve $v(\lambda)$ tangentë në një pikë P të Worl-sheet-it.	47
2.10	Një D_2 -brane shtrihet në planin (x_1, x_2) . Pikat përfundimtare e fijes së hapur mund të lëvizin lirshëm në plan, por duhet të mbeten të lidhura me të. Koordinata x_3 e pikave të fundit duhet të zhduket gjatë gjithë kohës. Ky është një kusht i kufirit Dirichlet për koordinatën X_3	53
3.1	Vrima e zezë në koordinatat Schwarzschild Kruskal-Szekeres. . .	60
3.2	Funksioni $\Delta(r)$ për vrimat e zeza Reissner-Nordström	62
4.1	Grafiku i funksionit $f(z) = \omega = \sqrt{z}$	73
4.2	Grafiku që tregon se kur pasqyrohet plani kompleks te sfera e Riemann-it vendoset një pikë, N	73
4.3	Çdo hapësirë të mbyllur mund të pasqyrohet plotësisht në diskun njësi e cila nga ana mund të pasqyrohet plotësisht në çdo sipërfaqe të tjetër të mbyllur.	75
4.4	Ne mund të pasqyrojmë çdo poligon kompleks në gjysmën e sipërme të planit	75
4.5	Bashkëveprimi i fijeve të hapura, në të cilin një fije me energji E ndahet në fijet me energji E_1 dhe E_2 . Bashkëveprimi ndodh në $\tau = \tau_Q$	77
4.6	World-sheet për një bashkëveprim ndarës në matësin e dritë-kon-eve.	78
4.7	Një fije e hapur që lëviz	79
4.8	Majtas: shiriti i brendshëm është pasqyruar në H ë nëpërmjet pasqyrimin eksponencial. Djathtas: $\bar{H}$ është pasqyruar mbi diskun njësi nëpërmjet një transformimi linear fraksional.	79
4.9	Pasqyrimi konformal i fijes në një sferë Riemanni me shpime . . .	80
4.10	Pasqyrimi Schwarz-Christoffel $\omega(z)$ merr $\bar{H}$ në poligonin.	81
4.11	Një dritë-kon ne diagram tregon fijet tre dhe katër bashkuar për të formuar një fije të ndërmjetme të cilat pastaj ndahen në fijet një dhe dy.	82
4.12	Një dritë-kon ne diagram tregon fijet tre dhe katër bashkuar për të formuar një fije të ndërmjetme të cilat pastaj ndahen në fijet një dhe dy.	84

5.1	Klasa e parë Chern ka të bëjë me vendet ku rrjedha e një fushe vektoriale krejtësisht të mbyllef.	89
5.2	Përcaktimi i klasës së parë Chern të një objekti.	90
5.3	CP^2 lokal	102
5.4	CP^1 lokal	103
5.5	r-vlera, për $r \in [35 - 51]$, tek	105
5.6	r-vlera, për $r \in [53 - 91]$, tek	106
5.7	r-vlera, për $r \in [34 - 54]$, çift	106
5.8	r-vlera, për $r \in [56 - 96]$, çift	107
5.9	q-vlera	108
5.10	Një shembull i thjeshtë, torusi	112
5.11	Deformimi i torusit.	112
5.12	Forma e një torusi përshkruhet nga një parametër strukture komplekse τ, θ është këndi dhe τ faza.	114
5.13	Koni Kähler	114

Konstantet Fizike

Shpejtësia e dritës	$c = 2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Gjatësia e Plankut	$l_p = 1.616\,228\,37 \times 10^{-34} \text{ m}$
Konstantja Gravitacionale	$G = 6.674\,08 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

Lista e Simboleve

l_s	gjatësi e fijos	m
l_p	gjatësi e Plankut	m
T_0	tension i fijos	N
μ_0	masë për njësi të gjatësisë	N
M	masa	kg
F	forca	N
v_0	shpejtësia e valës	N m ⁻¹
L	langranzhiani	m
T	energja kinetike	J
V	energja potenciale	J
S	vepërimi	Js
A	puna	J
E	energja	J
T	temperatura	°C
S_B	Entropia e Bekenstein	J K ⁻¹
T_H	temperatura Hagedorn	°C
R	rreze	m
$S(E)$	entropia	J K ⁻¹
ω	frekuenca rrethore	rad s ⁻¹

Kapitulli 1

Teoria e Fijeve si një teori unifikimi në fizikë

Teoria e Fijeve është një përpjekje për të bashkuar dy shtyllat e fizikës së shekullit të 20-të: Mekanikën Kuantike dhe Teorinë e Relativitetit të Albert Ajnshtajnit, pra me një kornizë gjithëpërfshirëse që mund të shpjegojë të gjithë realitetin fizik. Ajo ka tërhequr një numër të madh kërkuesish të profilit të lartë, duke përfshirë dhe shumë Nobelistë, dhe ka qenë e dobishme në hapjen e zonave të reja ndërmjet matematikës dhe fizikës. Ajo e realizon këtë duke vendosur se grimcat janë në të vërtetë fije një-dimensionale, vibracionet e të cilave përcaktojnë vetitë e grimcave, të tilla si: masa, ngarkesa etj. Shumë shkencëtarë besojnë në Teorinë e Fijes për shkak të bukurisë së saj matematikore.

Studiuesit kanë përdorur Teorinë e Fijes në përpjekje për t'iu përgjigjur disa pyetjeve themelore rreth universit, siç është ajo që ndodh brenda një vrime të zezë ose për të simuluar proceset kozmike si Big Bang-u. Disa shkencëtarë janë përpjekur të përdorin gjithashtu Teorinë e Fijeve për të trajtuar energjinë e errët, forcat misterioze që veprojnë në zgjerimin e hapësirës etj.

Megjithatë që nga viti 1980, Teoria e Fijes është zhytur vazhdimisht në polemika. Ekziston një "luftë" ndërmjet dy palëve, atyre pro Teorisë së Fijeve dhe ndaj kritikëve të saj. Megjithatë, fizikantët fillimisht dëshirojnë të kenë një model teorik, edhe nëse nuk është ende plotësisht i saktë apo realist, që me kalimin e kohës ta zhvillojnë atë dhe më pas ta eksperimentojnë.

1.1 Matematika - Gjuha e Shkencës

Matematika dhe fizika janë ndërthurur historikisht që nga koha e grekëve të lashtë. Mbështetja në matematikë për të përshkruar natyrën është themeli mbi

të cilin është ndërtuar shkenca. Në fizikë ekzistojnë metodologji të mirëpërcaktuara për zgjidhjen e problemeve, të cilat sigurojnë udhëzime hap pas hapi për zbatimin e koncepteve të fizikës, por zotërimi i këtyre metodologjive kërkon një kuptim të njëkohshëm të koncepteve fizike dhe matematikore.

Astronomi dhe fizikani italian Galileo Galilei ka shkruar se *"Filozofia [natyra] është shkruar në atë libër të madh që është gjithnjë përpara syve tanë - dua të them universin - por nuk mund ta kuptojmë nëse nuk mësojmë më parë gjuhën dhe kuptojmë simbolet në të cilat është shkruar. Libri është shkruar në gjuhën matematikore dhe simbolet janë trekëndësha, rrathë dhe figura të tjera gjeometrike, pa ndihmën e të cilave është e pamundur të kuptohet një fjalë e vetme e saj; pa të cilën njeriu endet kot përmes një labirinti të errët."* (Galileo Galilei në Assayer, 1623)

Gjuha është një sistem shenjash ose kodesh të përdorura brenda një discipline. Gjuha mund t'i referohet një sistemi komunikimi duke përdorur simbolet ose tingujt. Matematika plotëson të gjitha kërkesat për të qenë gjuhë. Simbolet, kuptimet e tyre, sintaksa dhe gramatika janë të njëjta në të gjithë botën. Matematikanë, shkencëtarë dhe të tjerë përdorin matematikën për të komunikuar. Historia e matematikës mund të shihet si një seri gjithnjë në rritje e abstraksioneve.

Për shkak se matematika është e njëjtë në të gjithë botën, ajo mund të veprojë si një gjuhë universale. Një frazë ose formulë ka të njëjtin kuptim, pavarësisht nga gjuha tjetër që e shoqëron. Në këtë mënyrë, matematika ndihmon njerëzit të mësojnë dhe komunikojnë, edhe nëse ekzistojnë barrierat e tjera të komunikimit.

Edhe pse studiuesit kanë ndërtuar një themel të fortë gjatë rrjedhës së qindra e mijëra viteve, matematika në të vërtetë është një ndërmarrje e lulëzuar dhe dinamike. Në vend se të qenit një trup statik i njohurive, matematika është në fakt dinamike, gjithnjë në zhvillim, me njohuri të reja dhe me zbulimet e bëra çdo ditë është bërë rivale me degët e tjera të shkencës. Megjithatë, për ata të cilët e vlerësojnë forcën e dukshme të matematikës, ajo mund të shihet jo vetëm si një gjuhë, por si rruga më e sigurtë për të vërtetën, si guri i themelit mbi të cilin qëndron gjithë "ndërtesa" e shkencës .

1.2 Gjeometria në univers

Gjeometria është një nga rrugët kryesore për ne për të përshkruar gjithësinë. Fizika dhe kozmologjia kanë qenë shumë të rëndësishme për të bërë të mundur kuptimin e universit. Roli i gjeometrisë në to mund të jetë më pak i dukshëm, por është shumë i rëndësishëm.

Ka tri forma të mundshme të gjeometrisë së universit: univers i sheshtë (univers Euklidian ose kurba me lakim zero), univers sferik ose i mbyllur (me lakim pozitiv) ose univers hiperbolik ose i hapur (me lakim negativ). Pra, një univers me masë (energji) të lartë e ka lakimin pozitiv, ndërsa një univers me masë (energji) të ulët ka lakimin negativ.

Në hapësirën jo-Euklidiane, këndet e një trekëndëshi mund jenë më shumë se 180 gradë, ose më pak se 180 gradë, në varësi se si është e lakuar hapësira. Nëse ajo është e lakuar pozitivisht si një sferë, këndet e një trekëndëshi janë gjithmonë më shumë se 180 gradë. Në anën tjetër, nëse hapësira ka lakim negativ, këndet e një trekëndëshi janë gjithmonë më pak se 180 gradë.

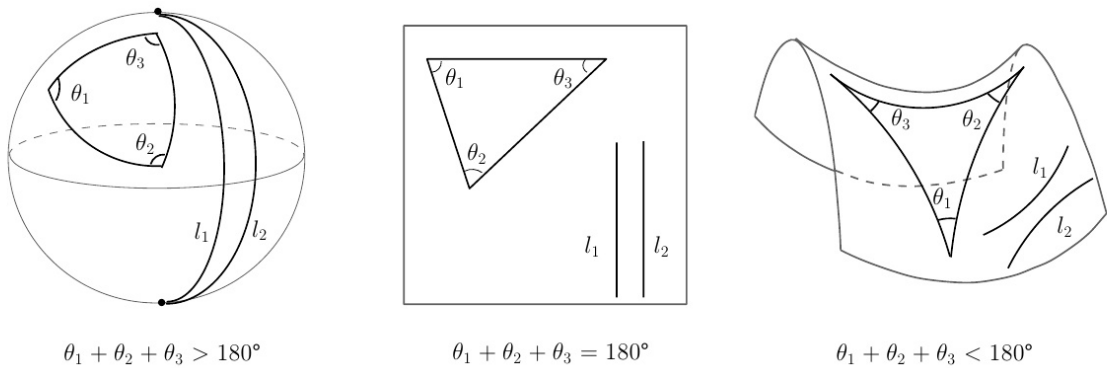


FIGURA 1.1: Lloje gjeometrish; sferike, Euklidiane, hiperbolike

Vëzhgimet kozmologjike standarde nuk thonë asgjë se si këto vëllime përshkruajnë bashku për t'i dhënë universit formën e tij të përgjithshme, pra topologjinë e tij. Tri gjeometritë e besueshme kozmike janë në përputhje me shumë topologji të ndryshme.

Për shembull, relativiteti do të përshkruante një torus dhe një plan me të njëjtat ekuacione, edhe pse torusi është i fundmë dhe plani është i pafundmë. Përcaktimi i topologjisë kërkon një kuptim fizik përtej relativitetit.

Forma e universit do të ndikojë dhe te ajo që ne shohim, por kjo gjë dhe mund të na mashtrrojë. Për shembull në qoftë se kozmosi është i fundosur, ashtu si në një sallë me pasqyra, iluzioni i pafundësisë do të dilte si dritë e mbështjellë në të gjithë hapësirën, ndoshta më shumë se një herë - duke krijuar imazhe të shumta të secilës galaktikë. P.sh. në qoftë se një kuti përmban vetëm tri sfera dhe në faqet e saj vendosim pasqyra, atëherë do të prodhohet një numër i pafundmë imazhesh. Natyrisht, në universin e vërtetë nuk ka kufij nga e cila drita mund të pasqyrohet. Në vend të kësaj, një shumëllojshmëri imazhesh mund të lindin kur rrezet e dritës përfundojnë gjithnjë e më shumë në univers. Nga modeli i imazheve të përsëritura, mund të nxjerrim përfundimin e madhësisë dhe formës së vërtetë të universit.

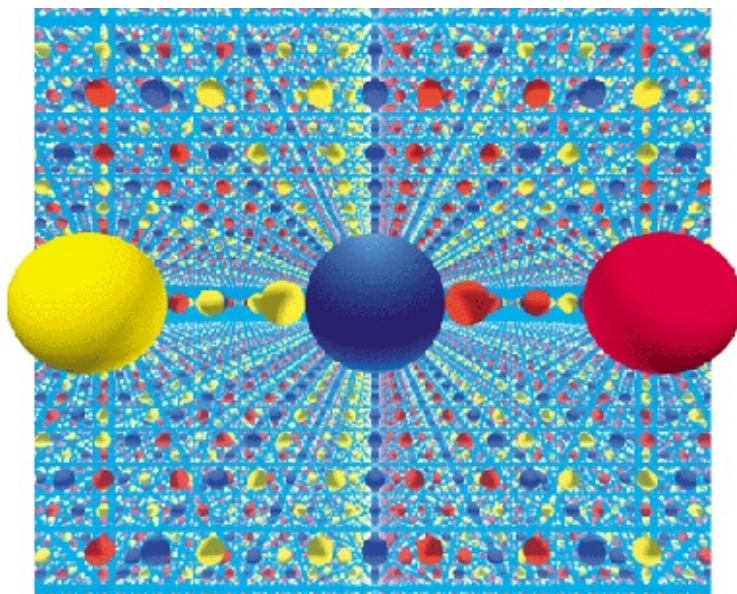


FIGURA 1.2: Një paraqitje e mundshme e gjeometrisë së universit

1.2.1 Zhvillimi i gjeometrisë

Shkrimi i parë që përmban fakte të thjeshta gjometrike është gjetur në Egjipt dhe është i shek. XVII p.e.s. Në të përmbahen rregullat e njehsimit të syprinave të disa figurave dhe vëllimeve të disa trupave. Këto rregulla ishin marrë me rrugë gjeometrike, pa asnjë vërtetim logjik të vërtetësisë së tyre.

Krijimi i gjeometrisë si shkencë matematike ndodhi më vonë dhe lidhet me emrat dijetarëve grekë: Tales (625-547 p.e.s.), Pitagora (580-500 p.e.s.), Demokriti (460-370 p.e.s.) dhe Euklid (shek. III p.e.s.) etj.

Në veprën e shquar të Euklidit "Elementet" (300 p.e.s.) ishin sistemuar faktet kryesore gjeometrike që njiheshin në atë kohë. Më kryesore është se në "Elementet" u zhvillua mënyra aksiomatike e ndërtimit të gjeometrisë, e cila konsiston në atë që në fillim formulohen tezat kryesore (aksiomat) dhe pastaj mbi bazën e tyre, nëpërmjet arsyetimeve vërtetohen fjalitë e tjera (toremata).

Rezultatet e marra përdoren si në praktikë ashtu edhe në studimet e mëtejshme shkencore. Disa nga aksiomat e propozuara nga Euklidi përdoren deri tani në kurset e gjeometrisë disa kanë formë të ndryshuara, si p.sh "Nëpër çdo dy pika kalon një dhe vetëm një drejtëz" etj.

Ndihmes të madhe në studimin e mëtejshëm të çështjeve të ndryshme të gjeometrisë sollën Arkimedi (287-212 p.e.s.), Apolloni (shek III p.e.s.) dhe dijetarë të tjerë të antikitetit grek.

Një etapë të re në zhvillimin e gjeometrisë filloi vetëm shumë shekuj më vonë, në shekullin XVII të erës sonë. Matematikani dhe filozofi i shquar francez R. Dekart (1596-1650) propozoi një qasje të re për zgjidhjen e problemeve gjeometrike. Në veprën e tij "Gjeometria" (1637) ai futi metodën e koordinatave duke lidhur gjeometrinë me algjebërën, gjë që lejoi të zgjidhen shumë problemeve gjeometrike me metoda algjebrike. Me anë të sistemit koordinativ mund të përshkruhen shumë figura të komplikuar.

Koordinatat karteziene janë themelet e gjeometrisë analitike dhe ofrojnë interpretime gjeometrike për shumë degë të tjera të matematikës: si algjebra lineare, analiza komplekse, gjeometria diferenciale, teoria e grupeve etj. Një shembull i njohur është koncepti i grafikut të një funksioni. Koordinatat karteziene janë gjithashtu mjete të domosdoshme për disiplinat më të aplikuara që merren me gjeometrinë, duke përfshirë astronominë, fizikën, inxhinierinë etj.

Në dimë që dimension i një hapësire të caktuar është numri i koordinatave që na duhen për të përcaktuar vendndodhjen e një pike të caktuar. Matja e hapësirës me një dimension është e thjeshtë, ne kemi nevojë vetëm për një vizore. Në hapësirën dydimensionale, zakonisht marrin dy boshtet pingul me njëri-tjetrin, një bosht i quajtur boshti i abshisave dhe tjetri i ordinatave. Distanca midis dy pikave gjendet duke krijuar trekëndëshat dhe pastaj duke përdorur teoremën e Pitagorës. Po kështu, në tre dimensione, ne do të na duhen

tri boshte pingule: x , y , dhe z . Në këtë mënyrë, u bë e mundur të përdreshin ekuacionet algjebrike për të përshkruar figurat gjeometrike komplekse. Duke përdorur këtë qasje, mund të mendohet për çdo dimension që dëshirojmë, jo vetëm (x, y, z) , por (a, b, c, d, e, f) ose $(j, k, l, m, n, o, p, q, r, s)$, por në këto dimensionë figurat nuk janë lehtësisht të vizualizuara.

Në zhvillimin e gjeometrisë një rol të rëndësishëm luajti aksioma, e cila në "Elementët" e Euklidit quhej postulat i pestë. Formulimi i tij nga Euklidi është mjet i ndërlikuar: "Nëse një drejtëz që qëndron ndaj dy drejtëzave në mënyrë që këndet e brendshme në të njëjtën anë janë më pak se dy kënde të drejta, atëherë dy drejtëzat, nëse zgjaten pafundësisht do të takohen në anën në të cilën gjenden dy këndet me shumë më të vogël se dy kënde të drejta". Prandaj zakonisht atë e zëvendësojmë me një aksiomë ekuivalente. "Nëpër një pikë (që nuk ndodhet në një drejtëz të dhënë) kalon vetëm një drejtëz paralele me drejtëzen e dhënë".

Për shumë shekuj përpjekjet e një numri të madh shkencëtarësh u përpoqën për vërtetimin e postulatit të pestë, duke synuar që numri i aksiomave të përdorura të çohet në minimum. Në fund të shek. XVIII, tek disa gjeometra lindi mendimi për pamundësinë e vërtetimit të postulatit të pestë. Shkencëtarët e zëvendësuan postulatit të pestë me të kundërtin e tij; Nëpër një pikë që nuk shtrihet në drejtëz mund të hiqen të paktën dy drejtëza që nuk e presin atë. Gjeometria e ndëruar mbi këtë sistem të ri aksiomash është jo-Euklidiane. Harutes të saj janë: Gauss-i (1777-1855), Boljai (1802-1860) dhe Llobacevski (1792-1856). Vërtetësia e njëres apo tjetres gjeometri mund të përcaktohet vetëm me rrugë eksperimentale.

Shkenca sot ka treguar që gjeometria Euklidiane është vetëm ajo që na rrethon, kurse në përmasa kozmike ajo ka një devijim të dukshëm nga gjeometria e botës reale.

Në vitin 1854 Georg Friedrich Bernhard Riemann-i kuptoi se hapësira nuk është e kufizuar në aspektin e numrit të dimensioneve. Ai tregoi se si distanca, lakimi dhe vetitë e tjera në hapësirë mund të llogariteshin saktësisht. Ai spekuloi mbi dimensionalitetin dhe gjeometrinë e vetë universit; kjo njihet si gjeometria e Riemann-it. Riemann-i gjithashtu filloi punën për një teori matematikore që mund të lidhë së bashku energjinë elektrike, magnetizmin,

dritën dhe gravitetin, një detyrë e pazgjidhur nga shkencëtarë deri në ditët e sotme.

Ajnshtajn-i për afro një dekadë ishte përpjekur për të kombinuar teorinë e tij të relativitetit me parimet e gravitetit të Njutonit. Ai dyshonte se përgjigja mund të qëndronte diku në gjeometri dhe punoi me një mik gjeometër të quajtur Marcel Grossman. Grossman i prezantoi Ajnshtajn-i gjeometrinë e Riemann-it, e cila ishte e panjohur për fizikantët në atë kohë, edhe pse kishte gjeometër që e quanin atë "një rrëmuje të tmerrshme dhe fizikanët nuk duhet të përfshiheshin në këtë gjeometri".

Gjeometria e Riemann-it ishte çelësi për zgjidhjen e enigmës së Ajnshtajn-it dhe që e kishte munduar atë gjatë gjithë atyre viteve. Ajnshtajn-i ishte përballur me idenë e një kurbature për hapësirën katër-dimensionale (e njohur ndryshe si universi ynë) që nuk ishte pjesë e një hapësire më të madhe. Për fat të mirë për të, Riemann-i kishte siguruar tashmë një kuadër të tillë duke përcaktuar hapësirën pikërisht në këtë mënyrë. Ajnshtajni thoshte se "kjo pjesë e matematikës është bërë me porosi për zbatimin e pikëpamjes së tij të re të forcës gravitacionale", sipas Brian Greene.

Ajnshtajn-i pohonte se jo vetëm hapësirë-koha mund të përshkruhet me gjeometrinë e Riemann-it, por edhe gjeometria e hapësirë-kohës do të ndikonte fizikat e saj. Ndërsa Relativiteti Special e kishte hapësirën dhe kohën të unifikuar nëpërmjet nocionit të hapësirë-kohës, teoria e mëvonshme e relativitetit të përgjithshëm tregoi se objektet masive shkaktojnë shtrembërim të hapësirë-kohës, që njihet si gravitet. Ky ishte një zbulim i madh konceptual. Fizika njutoniane e kishte trajtuar hapësirën si një sfond pasiv, jo si një pjesëmarrës aktiv në procedurë. Kjo ishte një arritje e jashtëzakonshme që mund edhe të ketë befasuar dhe Ajnshtajn-in, i cili nuk e kishte njohur faktin se fizika dhe matematika mund të jetë e ndërthurur në mënyrë të ndërlikuar.

Megjithë historinë e pasur të gjeometrisë dhe arritjeve të saj, ne duhet të kemi parasysh se kjo është një histori evolucioni. Një nga transformimet më të fundit, që ka dhënë disa kontribute në Teorinë e Fijes, është analiza gjeometrike. Kjo qasje bëhet për të shfrytëzuar metodat e fuqishme të analizës, në një formë e avancuar të njehsimit diferencial, për të kuptuar fenomenet gjeometrike dhe anasjelltas, për të përdorur intuitën gjeometrike për të kuptuar analizën.

1.2.2 Lakimi i brendshëm dhe sipërfaqet minimale

Gauss-i gjithashtu ka avancuar konceptin e gjeometrisë së brendshme, ideja se një objekt (ose sipërfaqe) ka lakim-in e vet (i ashtuquajtur lakimi i Gausit). Lakimi i një objekti është i pavarur nga mënyra sesi ai mund të jetë vendosur në hapësirë. Ne dimë p.sh. se lakimi i një flete është zero, por në qoftë se rrotullojmë atë do të formohet një cilindër. Kjo sipërfaqe dydimensionale, sipas Gausit, ka dy kurbatura kryesore të cilat janë pingule me njëra-tjetrën: njëri lakim lidhet me rrethin dhe ka vlerën $1/r$ (n.q.se $r=1$ lakimi është 1) dhe lakimi tjetër është përgjatë gjatësisë së cilindrit, që është një vijë e drejtë. Lakimi i një vije të drejtë është zero, pasi ajo nuk ka kurbaturë. Lakimi i Gausit i këtij objekti, ose ndonjë objekti tjetër dydimensional, është e barabartë me prodhimin e lakimit të këtyre dy kurbaturave, i cili në këtë rast është $1 \times 0 = 0$. Pra, në bazë të lakimit të saj të brendshëm, cilindri është i njëjtë me një fletë letre.

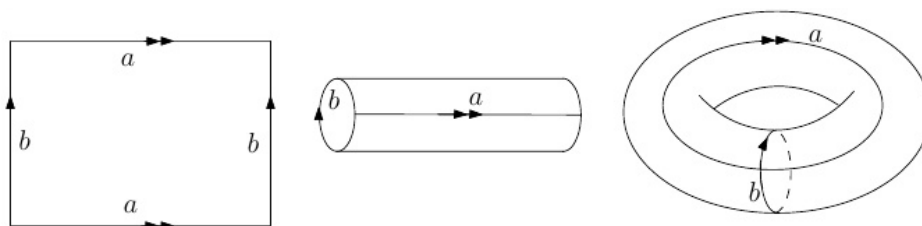


FIGURA 1.3: Nga lakimi i brendshëm cilindri është i njëjtë me një fletë letre

Një klasë e rëndësishme e pyetjeve që analiza gjeometrike na lë për të zgjidhur është ajo që ka të bëjë me sipërfaqet minimale. Termi "sipërfaqe minimale" është përdorur për shkak se këto sipërfaqe fillimisht u ngritën si sipërfaqe që minimizojnë sipërfaqen, duke iu nënshtruar disa kufizimeve.

Minimizimi ka qenë një koncept themelor në të dy disiplinat, në gjeometri dhe fizikë për qindra vjet. Në shekullin e shtatëmbëdhjetë, për shembull, matematikani francez Pierre de Fermat tregoi se drita që udhëtonte nëpër mjedise të ndryshme gjithmonë ndjek rrugën që merr më pak energji.

Në vitet 1700, fizikanti belg Joseph Plateau ka kryer eksperimente klasike në këtë fushë. Ai zhyste tela të vendosur në forma të ndryshme në kazanë me ujë

me sapun. Plateau arriti në përfundimin se sipërfaqet e sapunit që u formuan ishin gjithmonë sipërfaqet minimale. Ai mendonte, për më tepër, se çdo kurbë të mbyllur, gjithmonë mund të prodhojë një sipërfaqe minimale. Ndonjëherë ka vetëm një sipërfaqe dhe ne e dimë se është e vetme. Herë të tjera ka më shumë se një sipërfaqe e cila minimizon zonën, dhe ne nuk e dimë se sa janë në total. Hamendja e Plateau-t nuk u provua deri 1930-ën, kur Jesse Douglas dhe Tibor Rado në mënyrë të pavarur arritën në zgjidhje për të ashtuquajturin problem të Plateau-t.

Kjo klasë përfshin sipërfaqet zona e të cilës është më e vogël në krahasim me të gjitha sipërfaqet tjera të kufizohet nga të njëjtit kufi e cila mund të quhet një sipërfaqe vërtetë minimale, por ajo gjithashtu përfshin një numër edhe më të madh të të ashtuquajturave sipërfaqet stacionare që minimizojnë zona të vogla (në nivel lokal), por jo domosdoshmërisht kudo (globalisht). Sipërfaqet në këtë kategori, të cilat e kanë tensionin sipërfaqësor zero dhe lakimin zero, janë me interes të madh për matematikanët dhe inxhinierët. Ne priremi të mendojmë për sipërfaqet minimale në drejtim të një familjeje, të gjithë anëtarët e të cilës janë të ngjashme.

Douglas tregoi se jo çdo sipërfaqe minimale është aq e thjeshtë sa një sipërfaqe sapuni. Disa sipërfaqe minimale që mendojnë matematikanët janë shumë më komplekse, të mbushura me kthesa dhe zbukurime të ndërlikuara të quajtura *singularitete*, megjithatë shumë prej tyre mund të gjenden edhe në natyrë. Duke ndjekur punën Douglas-Rado disa dekada më vonë, Robert Osserman tregoi se sipërfaqet minimale të hasura në eksperimentet e Plateau ekspozojnë vetëm një lloj të thjeshtë singulariteti. Në vitin 1970 William Meeks, dhe Shing-Tung Yau i panë situata në të cilat sipërfaqet minimale janë të ashtuquajturat disqe të ngulitur, që do të thotë se sipërfaqja nuk del në anën e gjërë të saj për të kaluar veten. (Lokalisht, një kalim i tillë do të dukej si kryqëzimi i dy ose më shumë planeve.)

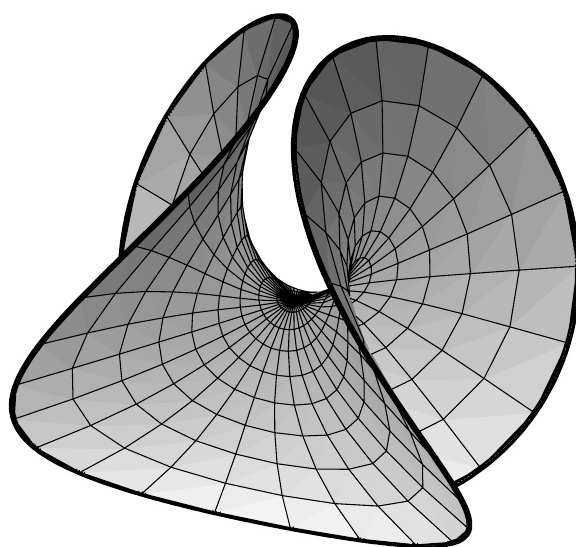


FIGURA 1.4: Postulati i Joseph Plateau-t: Për çdo kurbë të mbyllur mund të gjendet një sipërfaqe minimale.

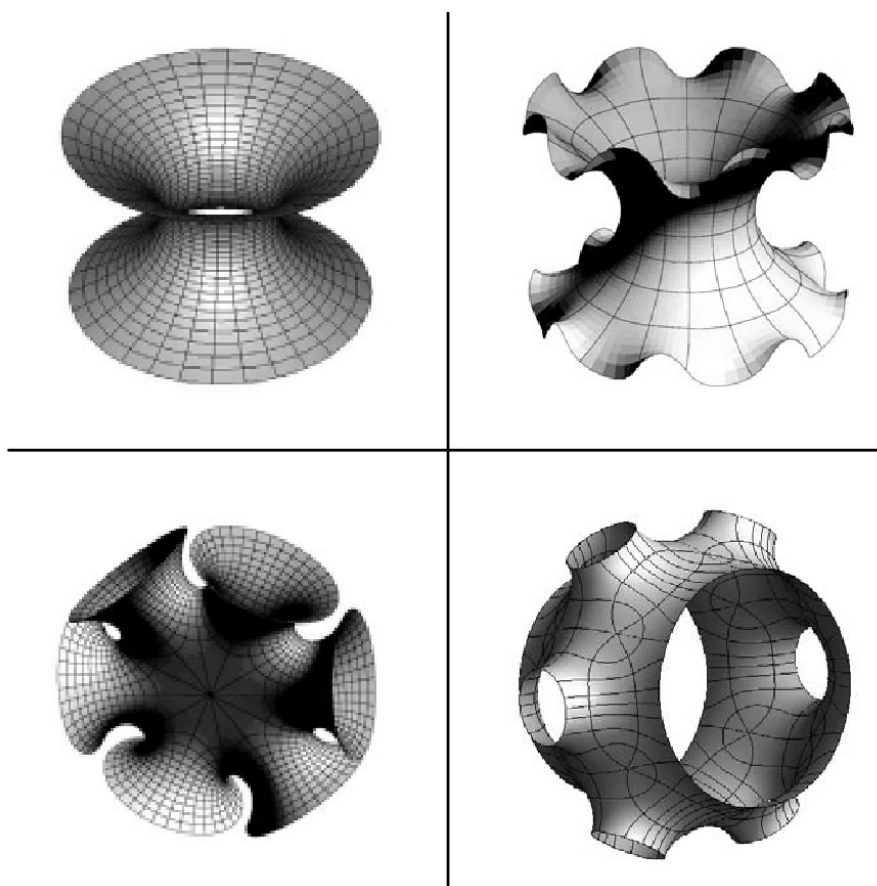


FIGURA 1.5: Sipërfaqet minimale; nëse kufiri përbëhet jo vetëm nga një kurbë e mbyllur, por në disa kurba të mbyllura

1.3 Dimensionet shitesë

Një pyetje që vazhdonte të shqetësonte shkencëtarët ishte: A mund rritet akoma më tej numri i dimensioneve të hapësirë-kohës?

Në vitin 1919, një matematikan gjerman, i panjohur deri në atë kohë, Theodor Kaluza bëri një sugjerim befasues. Ai propozoi që pëlhura hapësinore e universit mund të posedonte më shumë se tri dimensione. Motivimi për këtë tezë radikale ishte realizimi i Kaluza-s se ai krijoi një kornizë elegante dhe bindëse për të bashkuar relativitetin e përgjithshëm të Ajnshtajnit dhe teorinë elektromagnetike të Makswellit në një kornizë të vetme dhe unike.

Sugjerimi i Kaluza-s në vitin 1919 se universi ynë mund të ketë përmasa më të mëdha hapësinore sesa ato që janë të dukshme drejtpërdrejtë, dicka tjetër e bëri me të vërtetë bindëse. Në ato kohëra Ajnshtajn-i kishte formuluar Relativitetin e Përgjithshëm.

Formalizmi matematikor i teorisë së tij, megjithatë, mund të kërkonte ekuacione analoge për një univers me dimensione shitesë. Sipas supozimit "modest" të një dimensionit hapësinor shitesë, Kaluza bëri analizën matematikore dhe në mënyrë eksplicite rridhnin ekuacionet e reja.

Ai gjeti se ekuacionet që i përkisnin tre dimensioneve të zakonshme ishin në thelb identike me ekuacionet e Ajnshtajn-it. Pas studimit të ekuacioneve shitesë që lidhen me dimensionin e ri, Kaluza kuptoi se ekuacionet shitesë nuk ishin asgje tjetër por ekuacionet që Maxwell-i kishte shkruar në vitet 1880 për të përshkruar forcat elektromagnetike.

Duke shtuar një dimension tjetër hapësinor, Kaluza kishte bashkuar teorinë e gravitetit të Ajnshtajn-it me teorinë e Maxwellit.

Duke pasur krijimtarinë e guximshme për të imagjinuar se universi ynë ka një dimension shitesë, Kaluza sugjeroi se ekzistonte një lidhje e thellë ndërmjet gravitetit edhe elektromagnetizmit. Teoria e tij argumentonte se si graviteti ashtu edhe elektromagnetizmi janë të lidhur në strukturën e hapësirës. Graviteti kryhet nëpërmet tri dimensioneve të njohura, ndërsa elektromagnetizmi kryhet nga një dimension i ri, që ishte mbështjella.

Kaluza e dërgoi letrën e tij te Ajnshtajn-i, dhe fillimisht ai ishte mjaft i intriguar. Më 21 prill 1919, Ajnshtajni i shkroi përsëri Kaluzës dhe i tha se kurrë nuk i kishte ndodhur që bashkimi mund të arrihej "nëpërmjet një hapësire pesë-dimensionale". Ai shtoi: "Në shikim të parë, më pëlqen ideja juaj jashtëzakonisht".

Rreth një javë më vonë Ajnshtajn-i i shkroi Kaluza-s përsëri, këtë herë me disa skepticizma: "Kam lexuar përmes gazetës idenë tuaj dhe e kam gjetur aty të vërteta interesante. Nga ana tjetër, më duhet të pranoj se argumentet e paraqitura deri më tani nuk duken mjaft bindëse".

Megjithëse ishte një ide e mrekullueshme, studimi i hollësishëm i mëpasshëm i propozimit të Kaluza-s, i shtuar nga kontributet e Klein-it, tregoi se ajo ishte në konflikt serioz me të dhëna eksperimentale dhe shumë nga fizikantët që kishin marrë parasysh idetë e Kaluzës humbën interesin.

Në vitin 1926, fizikanti suedez Oskar Klein propozoi që dimensionin e pestë të ishte real, por shumë i vogël për tu parë dhe bëri disa përmirësime të rëndësishme. Që nga ajo kohë, teoritë që përfshijnë dimensionet shtesë të fshehta (ose të kompaktifikuara) janë njohur si teoritë Kaluza-Klein.

Për të përfytyruar dimensionet shtesë mund të shohim shembullin me cilindrin. Ne dimë se ai është dydimensional, por nëse rrezja e rrethit bëhet shumë e vogël, ose ekuivalente nëse cilindri shihet nga një distancë e madhe, ai duket njëdimensional.

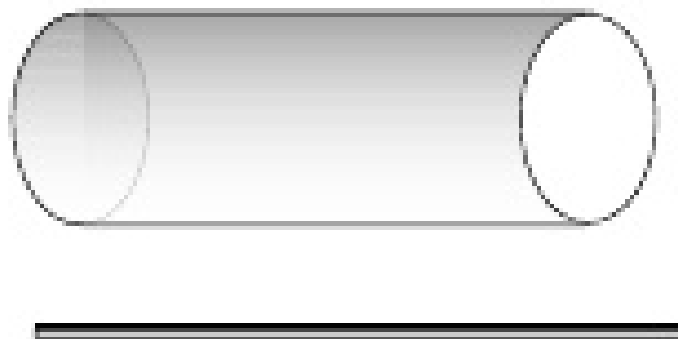


FIGURA 1.6: Një cilindër dydimensional nga larg duket njëdimensional

Në fund të fundit, teoria e Kaluza-Klein-it u hodh poshtë. Pjesërisht kjo ndodhi sepse ata parashikuan një grimcë që kurrë nuk është treguar se ekziston dhe pjesërisht sepse përpjekjet për të përdorur teorinë për të llogaritur raportin e masës së një elektroni me ngarkesën e tij shkuan keq. Për më tepër, Kaluza dhe Kleini, si dhe Ajnshtajn-i pas tyre, po përpiqeshin të unifikonin vetëm elektromagnetizmin dhe gravitetin, pasi nuk dinin për forcat e dobëta dhe të forta, të cilat nuk ishin kuptuar mirë deri në gjysmën e dytë të shekullit të njëzet. Kaluza dhe Klein, si dhe Ajnshtajn-i, nuk arritën të ndërtonin një teori që mund të kapte gjithçka që dinim për fizikën.

1.3.1 Unifikimi në dimensione të larta. Manifoldet Calabi-Yau

Nga mesi i viteve 1970, filluan përpjekje intensive me dimensione më të mëdha të hapësirës, p.sh. figura më poshtë ilustron një shembull me dy dimensione shtesë:

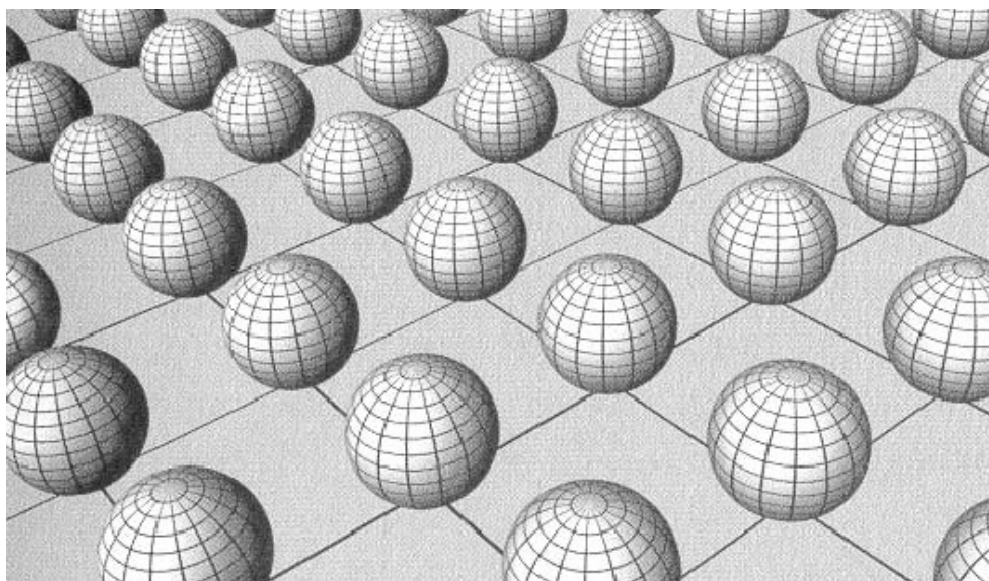


FIGURA 1.8: Hapësira 6-dimensionale

Në figurën tjetër ne ilustrojmë një mundësi në të cilën ka përsëri dy dimensione më shumë, tani në formën e një unaze të zbrazët - domethënë një torus. Edhe pse ata janë përtej aftësisë sonë, mund të imagjinohen mundësi të komplikuar në të cilat ekzistojnë tre, katër, pesë, në thelb çdo numër i dimensioneve shtesë hapësinore.

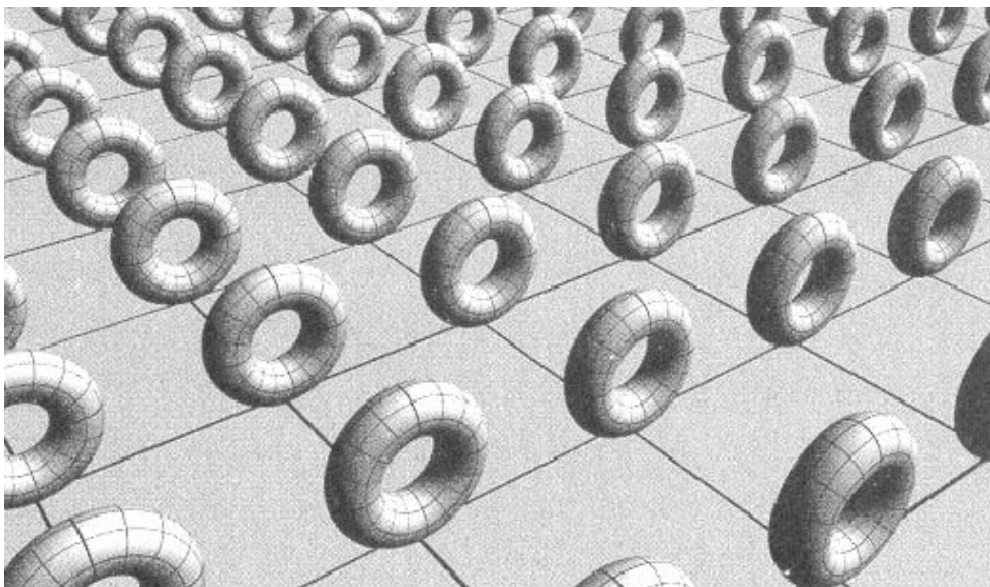


FIGURA 1.9: Një shembull tjetër hapësire 6-dimensionale

Në mesin e viteve 1980, Green-i dhe Schwarz-i (duke u bazuar në punën e shumë të tjerëve) zbuluan se Teoria e Fijeve është një kandidat shumë premtues për një teori të tillë të dimensioneve më të larta.

Problemi i dimensioneve u zgjidh duke prezantuar idenë e kompaktimit, në të cilën dimensionet shtesë perdridhen rreth njëra-tjetrës, dhe janë aq të vogla saqë janë shumë të vështira për t'u zbuluar.

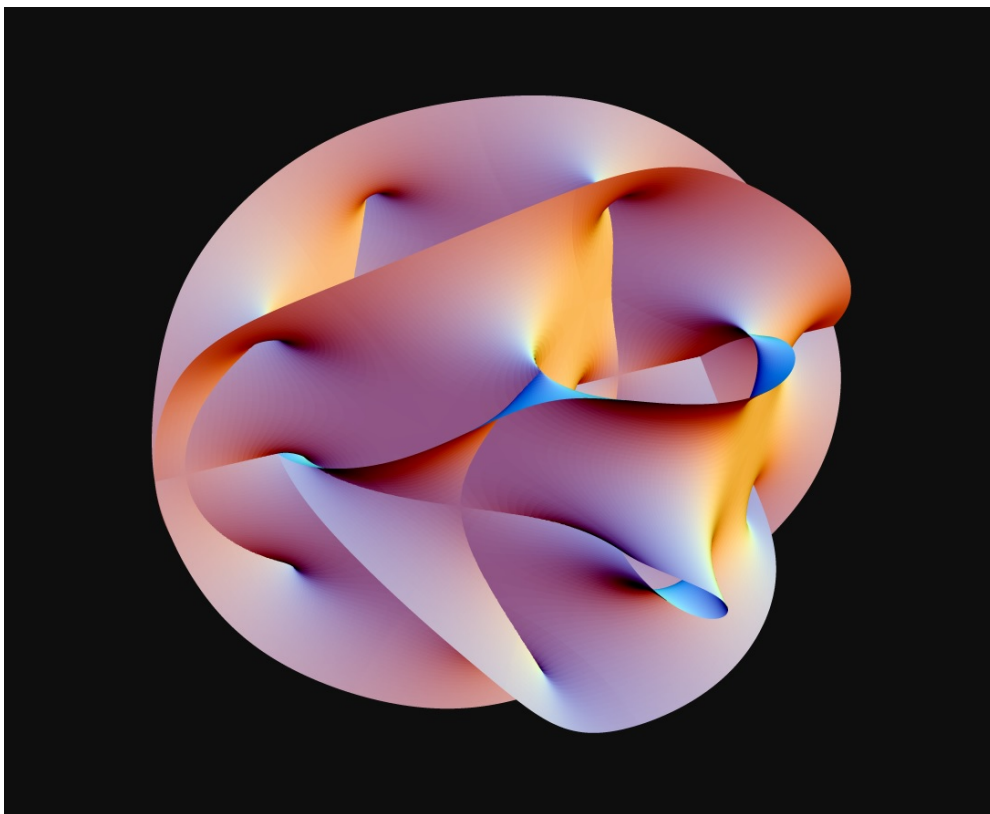


FIGURA 1.10: Një shembull manifoldi Calai-Yau

Matematikisht kjo ishte realizuar me anë të manifoldeve Calabi-Yau, një shembull i së cilës është treguar në figurën 1.10. Problemi është se Teoria e Fijeve nuk ofron asnjë mënyrë reale për të përcaktuar saktësisht se cila nga këto manifolde Calabi-Yau ekziston me të vërtetë në natyrë.

Një përfitim nga manifoldet Calabi-Yau ishte se gjeometria e dimensioneve të përdredhura krijon lloje të ndryshme të grimcave që vëzhgohen në universin tonë. P.sh. nëse manifoldi Calabi-Yau ka tri vrima, atëherë nga Modeli Standard i fizikës së grimcave do të parashikohen tre familje të grimcave.

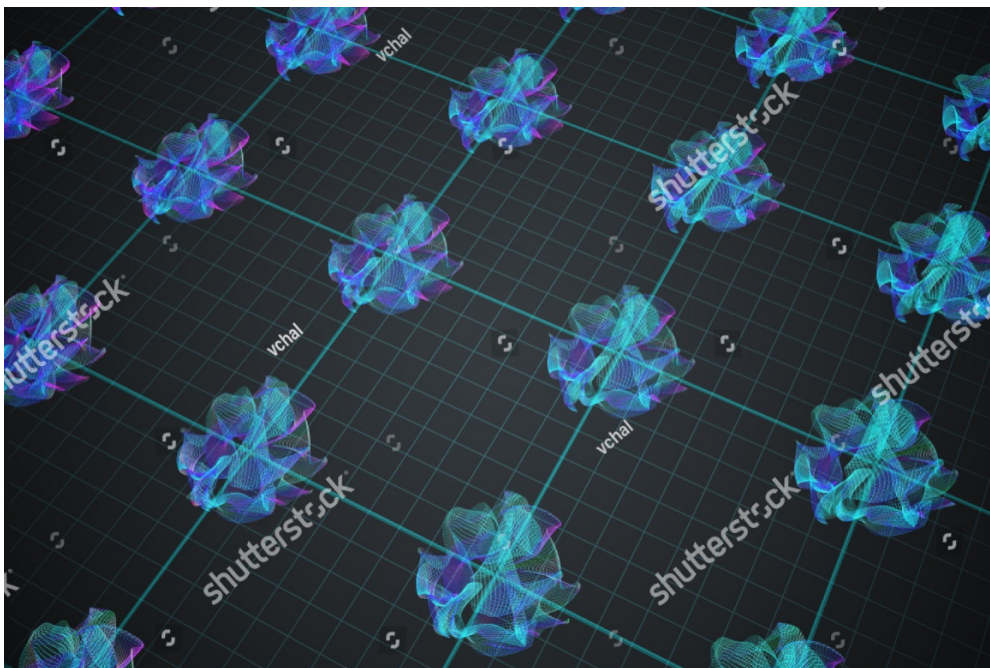


FIGURA 1.11: Manifoldet Calai-Yau në hapësirë

Sipas Teorisë së Fijeve në çdo pikë të hapësirës katërdimensionale që ne vërejmë, në fakt ekziston një hapësirë e vogël gjashtëdimensionale me strukturën e një manifoldi Calabi-Yau, si në figurën 1.11. Manifoldet Calabi-Yau më në fund siguruan një model konkret gjeometrik për Teorinë e Fijeve.

Një arsye që i bën manifoldet Calabi-Yau shumë tërheqëse për Teorinë e Fijeve është kompaktësia e tyre: manifoldet janë jashtëzakonisht të vegjël, me një diametër diku rreth 10^{-30} cm. Për të qenë në përputhje me kuptimin e fizikës, manifoldet që mbulonin dimensionet e fshehura duhej të kishin lakim Ricci të barabartë me zero. Për më tepër, Teoria e Fijeve merret me një lloj të veçantë të simetrisë, të quajtur supersimetria, e cila vendos kërkesa të veçanta për gjeometrinë e hapësirës. Këto kërkesa i bëjnë manifoldet Calabi-Yau kandidatë të shkëlqyeshëm për Teorinë e Fijeve, edhe pse ende nuk e dimë nëse ato janë zgjidhja e vetme e mundshme për problemin e dimensioneve. Për manifoldet Calabi-Yau do të flasim në kapitullin e pestë më me detaje.

1.4 Rruga drejt unifikimit në fizikë

Gjatë gjithë kohës shkencëtarët janë munduar që të gjitha grimcat dhe forcat të përmbliidhen në një teori të unifikuar.

Ne dimë se bota ku ne jetojmë është e përbërë nga atomet, të cilat janë të përbërë nga vetëm tri komponente themelore: elektronet që vërtiten rreth një bërthamë të përbërë prej neutroneve dhe protoneve.

Elektroni është një pjesëz e vërtetë themelore (që përfshihet në një familje të grimcave të njohura si leptone).

Neutronet dhe protonet janë të përbërë nga grimca edhe të vogla, të quajtura kuarke. Kuarket janë grimca elementare.

Që në kohët e lashta, shkencëtarët kanë kërkuar një lidhje të energjisë elektrike me energjinë magnetike. Për një kohë të gjatë ato dukeshin si dy fenomene fizike që nuk kishin lidhje me njëra-tjetrën. Në fillim është studiuar energjia elektrike. Eksperimentet e Henry Cavendish-it janë kryer nga viti 1771 në 1773. Ata u pasuan nga vëzhgimet e Charles Augustin de Coulomb-it, të cilat janë përfunduar në 1785-ën. Hulumtimi i mëvonshëm në magnetizëm filloi të zhvillojë lidhjet me energjinë elektrike.

Në vitin 1819 Hans Christian-i zbuloi se rryma elektrike në një tel mund të shmangë gjilpërën e një busulle të vendosur aty pranë. Menjëherë pas kësaj, Biot-Savart-i (1820) dhe Amper-i (1820-1825), treguan sesi rrymat elektrike prodhojnë fusha magnetike.

Një hap i rëndësishëm është hedhur nga Michael Faraday (1831), i cili tregoi se kur ndryshojnë fushat magnetike lindin fushat elektrike.

Ishte James Clerk Maxwell-i (1865) i cili ndërtoi një grup të qëndrueshëm të ekuacioneve. Për këtë ekuacionet e elektromagnetizmit (ose Elektrodinamika) quhen "Ekuacionet e Maxwellit". Këto ekuacione bashkojnë energjinë elektrike dhe magnetike në një teori të qëndrueshme.

Një tjetër unifikim themelor ka ndodhur në fund të viteve 1960, rreth njëqind vjet pas punës së Maxwellit. Ky bashkim zbuloi marrëdhënien midis forcave elektromagnetike dhe forcave përgjegjëse për bashkëprimet e dobëta.

Një ndryshim i rëndësishëm u shkaktua nga Teoria Speciale e Relativitetit e

Albert Ajnshtajn-it. Në këtë teori ai gjen një unifikimin konceptual të nocioneve të vecanta të hapësirës dhe kohës. Mekanika e Njutonit u zëvendësua nga mekanika relativiste, dhe idete e vjetra absolute të kohës u braktisën.

Një tjetër ndryshim i modelit, ndoshta dhe me dramatik, u nxor nga zbulimi i mekanikës kuantike, zhvilluar nga Erwin Shrodinger-i, Werner Heisenberg-u, Paul Dirac-u dhe të tjerë, teoria kuantike është një teori mjaftë e saktë për të përshkruar fenomene mikroskopike. Elektrodinamika kuantike përdoret për llogaritje të sakta në këtë fushë. Në këtë teori, fotoni duket si kuanti i fushës elektromagnetike.

Teoria e bashkëveprimeve të dobëta është edhe një teori kuantike e grimcave, kështu, teoria e unifikuar është një teori kuantike. Kjo teori së bashku me teorinë kuantike formojnë Modelin Standard të fizikës së grimcave.

1.5 Modeli Standard

I ashtuquajtur i Modeli Standard i Fizikës së grimcave është teoria më e suksesshme shkencore e natyrës, në kuptimin se asnjë teori tjetër nuk ka një nivel të tillë të lartë të saktësisë mbi një gamë të plotë të fenomeneve fizike. Që nga formulimi i tij rreth 1970 nuk ka pasur një rezultat të vetëm eksperimental që ta hidhte poshtë këtë teori.

Megjithëse është një teori e plotë e fizikës, ajo ka disa mangësi të rëndësishme. Më poshtë do të listojmë disa nga problemet më kryesore të tij:

- Nga vjen ky model standard?

Për shembull ai ka disa parametra të cilat janë të fiksuara vetëm nga vëzhgimet eksperimentale. Ai thekson një spektër të caktuar të gjendjeve themelore grimcore. Në këto gjendje të veçanta grimcore formohen tri familje, secila prej të cilave është një kopje e të tjerave: ato ndryshojnë vetëm nga masat e tyre.

Për më tepër, vetëm familja e dritës duket të ketë shumë të bëjë me jetën në universin që ne njohim. Struktura është qartësisht e dukshme, por kjo nuk ishte kuptuar deri në zbulimin e mekanikës kuantike.

- Modeli Standard nuk përfshin gravitetin

Për këtë ne duhet të përdorim relativitetin e përgjithshëm që është një teori klasike dhe si e tillë është e papajtueshme me rregullat e mekanikës kuantike. Ne nuk mund ta vëzhgojmë forcën e gravitetit, sepse është shumë e vogël dhe e papërfillshme në krahasim me forcat e tjera që vëprojnë, ajo është më e vogël se 10^{-40} se shkalla e forcave bërthamore. Ne nuk mund të pretendojmë të kuptojmë universin, për aq kohë sa nuk mund të sigurojmë një teori e cila të jetë në gjendje të përshkruaj gravitetin dhe forcat bërthamore. Nëse ne do të përpiqemi për të përfshirë dhe gravitetin, atëherë ne do të hasim probleme. Një problem serioz është se rezultati është relativ. Kështu ne nuk mund të përdorim Modelin Standard si një parim themelor për gravitetin.

Forca e gravitetit duhet të jetë e përfshirë në mënyrë që të kemi një teori të plotë. Efektet e forcave gravitacionale janë aktualisht mjaft të papërfillshme në nivelin mikroskopik, por ato janë vendimtare në studimet e universit.

- Modeli Standard nuk mund të jetë i vlefshëm në të gjitha shkallët e energjisë

Teoritë kuantike kanë kuptime matematikore vetëm në qoftë se ato janë parë si një teori të energjisë së ulët. Për shkak të efekteve të relativitetit dhe bashkëveprimeve, Modeli Standard nuk mund të jetë i vlefshëm deri në të gjithë shkallët e energjisë, edhe në qoftë se graviteti nuk do të ishte një problem. Matematikisht ne e dimë se atje duhet të ketë diçka tjetër që do të shfaqet në një shkallë më të lartë të energjisë. Të gjithë ne mund të themi se në fizikën e re duhet të shfaqet shkalla kuantike e gravitetit.

- Një mangësi tjetër është se në Modelin Standard nuk përfshet supersimetria.

Supersimetria është një simetri që lidh bozonet dhe fermionet. Që të gjitha grimcat e marra parasysh janë fermionet dhe të gjithë transportuesit e forcës janë bozonet; kjo simetri unifikon materien dhe forcat. Në një teori me supersimetri, bozonet dhe fermionet shfaqen në çifte me masë të barabartë. Grimcat e Modelit Standard nuk e kanë këtë veti, kështu që supersimetria, nëse ajo ekziston me të vërtetë në natyrë, ajo duhet të jetë prishur në mënyrë spontane. Ndërsa zgjerimet e mësipërme të Modelit Standard mund ose nuk mund të ndodhin, është e qartë se përfshirja e gravitetit në kuadrin e fizikës së grimcave nuk është fakultative.

- Modeli Standart nuk parashikon masën dhe energjinë e errët

Vëzhgimet kozmologjike na tregojnë se Modeli Standard shpjegon rreth 5% të energjisë së pranishme në univers. Rreth 26% duhet të jetë materie e errët, e cila do të sillet si çdo materie tjetër. Pjesa tjetër (69%) duhet të jetë energjia e errët.

- Masa e neutrinove

Sipas Modelit Standard, neutrinot janë grimca pa peshë. Megjithatë, eksperimentet e neutrinove lëkundëse kanë treguar se neutrinot kanë masë. Termat masive për neutrinot mund të shtohen në Modelin Standard, por kjo do të çojë në probleme të reja teorike.

Ka dhe një numër të rezultateve eksperimentale të cilat janë dukshëm të ndryshme nga ajo që pritej nga Modeliti Standard.

- Hidrogjeni myonik

Rrezja atomike e matur e hidrogjenit myonik ndryshon dukshëm nga ajo e rreze e parashikuar nga Modeli Standard.

- Çrregullsia e momentit të dipolit magnetik të myonit

Vlera e matur eksperimentalisht e momentit të dipolit magnetik të myonit është shumë e ndryshme nga parashikimi i Modelit Standard.

- Të dhënat e eksperimentit “Babar”

Të dhënat e eksperimentit Babar tregojnë të metat e mundshme në Modelin Standard. Në këtë eksperiment, një elektron dhe pozitron përplasen, duke rezultuar në një meson B dhe një meson të antimateries B, e cila më pas shëndërrohet në një meson D dhe një lepton tau, si dhe një antineutrino tau.

- Rrezja e protonit

Rrezja e protonit të ngarkuar që matet duke përdorur një elektron është e ndryshme nëse matet duke përdorur myonet.

1.6 Teoria e Fijeve (String Theory) si një teori unifikimi në fizikë

Me këto komente, në këtë punim do të prezantojmë teorinë e fijeve, e cila është bërë dominante dhe ndoshta korniza për një teori të plotë për të njohur të gjithë fenomenet fizike. Si e tillë, ajo është në një kuptim një kurs për të futur pamjen moderne të fizikës së grimcave në nivelin e saj më themelor.

Ajo u ngrit në fund të viteve gjashtëdhjetë në një përpjekje për të përshkruar teorinë e bashkëveprimeve të forta. Megjithatë, ajo ka dhënë shumë ide të thella dhe të fuqishme. Me siguri, ajo ka pasur një efekt të thellë mbi matematikën e pastër. Por një tipar i rëndësishëm i Teorisë së Fijeve është se ajo natyrisht përfshin forcat gravitacionale dhe molekulare në përputhje me mekanikën kuantike dhe relativitetin (për aq sa ne dimë).

Kështu që duket e drejtë të thuhet se ekziston një kornizë matematikore e cila është e aftë të përshkruajë të gjitha ato që ne dimë dhe që janë të vërteta në fizikë.

Në teorinë e Fijeve, çdo grimcë është identifikuar si një mënyrë e vecantë vibracioni e një fijeje. Në analogji me muzikën, si një tel violine që mund të lëkundet në mënyra të ndryshme dhe secilit tonalitet i korrespondon një tingull i ndryshëm. Në Teorinë e Fijeve një prej gjendjeve vibruese të fijes është gravitoni, kuant i fushës gravitacionale. Të gjitha grimcat lindin nga vibracionet e fijeve, domethënë të gjitha grimcat janë të përfshira në një teori të vetme.

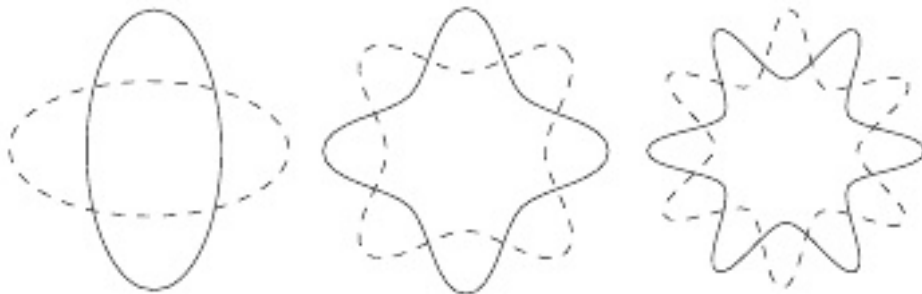


FIGURA 1.12: Grimca të ndryshme lindin si vibracione të ndryshme të fijeve

Në teorinë e fijeve kur mendojmë një procesi shëndërrimi $\alpha \rightarrow \beta + \gamma$, ku një grimcë elementare α shëndërrohet në grimcat β dhe γ , ne përfytyrojmë një fije të vetme vibruese, më pas ajo ndahet në dy fije të tjera që lëkunden në mënyra të ndryshme, ne i përcaktojmë ato si grimcat β dhe γ . Meqënëse fijet mund të ndryshojnë shumë shpejt, është e vështirë të vëzhgosh drejtpërdrejt natyrën e grimcave.

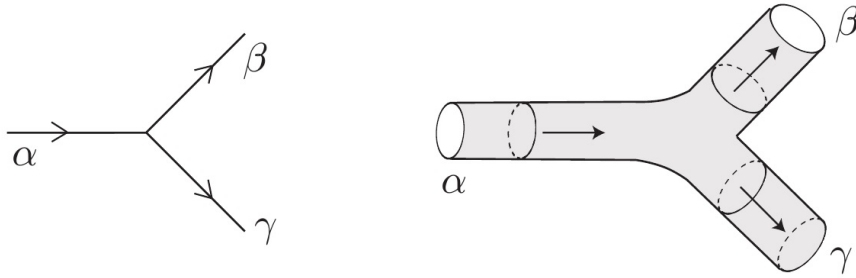


FIGURA 1.13: Shëndërrimi $\alpha \rightarrow \beta + \gamma$ majtas si grimcë, djathtas si fije

A jemi të sigurt se teoria e fijes është një teori e mirë kuantike e gravitetit?

Nuk ka asnjë siguri të plotë, por prova është shumë e mirë. Në të vertetë, mungesa e parashikueshmërisë që ndodh kur dikush përpiqet të kuantizojë teorinë e Ajnshtajn-it nuk duket të shfaqet në Teorinë e Fijeve. Për një teori ambicioze si Teoria e Fijes, shkalla e sigurisë është qartësisht e dëshirueshme. Do të ishte disi zhgënjyese që të ketë disa kandidatë të qëndrueshëm për një teori për të gjitha bashkëveprimet.

Shenja e parë që Teoria e Fijes është mjaft unike është se ajo nuk ka parametra të rregullueshme pa përmasë. Në modeli standard të fizikës së grimcave ka rreth njëzet parametra që duhet të rregullohen në disa vlera të sakta. Një teori me parametra të rregullueshme në përmasë nuk është me të vërtetë unike. Kur parametrat janë të vendosur për vlera të ndryshme, marrim teori të ndryshme me parashikime të ndryshme. Teoria e Fijeve ka një parametër shumë dimensional, gjatësia e fijes shenohet l_s . Vlera e saj mund të imagjinohet afërsisht sa përmasa tipike e fijes.

Një tjetër shenjë intriguese e unikalitetit e Teorisë së Fijes është fakti se dimensiononi i hapësirë-kohës është fiks. Hapësirë-koha jonë fizike është katër-dimensionale, me një dimension kohë dhe tri dimensione hapësirë. Në modelin standard ky informacion është përdorur për të ndërtuar teorinë. Në Teorinë e Fijes, nga ana tjetër, numri i dimensioneve hapësirë-kohë del nga një përllogarritje.

Sipas llogaritjeve, përgjigja nuk është katër, por saktësisht dhjetë. Disa prej këtyre dimensioneve mund të fshihen nga një pamje e thjeshtë, në qoftë se ata përdridhen në një hapësirë që është mjaft e vogël për t'i shpëtuar zbulimit në eksperimentet e bëra me energji të ulët.

Nëse Teoria e Fijeve është e saktë, disa mekanizma duhet të sigurojnë që dimensiononi i dukshëm i hapësirë-kohës është katër. Mungesa e parametrave të përshtatshëm është një shenjë e veçantisë së Teorisë së Fijeve: kjo do të thotë se teoria nuk mund të deformohet ose ndryshohet vazhdimisht duke ndryshuar këto parametra. Por nuk mund të ketë teori të tjera që nuk mund të arrihen me anë të deformimeve të vazhdueshme.

1.6.1 Madhësia e fijeve

Në një teori tradicionale të fushës kuantike grimcat elementare janë pikat matematike, ndërsa në Teorinë e Fijeve objektet themelore janë fije njëdimensionale (dhetrashësi zero). Fijet kanë një gjatësi të caktuar, e cila zakonisht shënohet me l_s dhe mund të vlerësohet nga analiza dimensionale. Meqë Teoria e Fijeve është një teori relativiste kuantike që përfshin gravitetin, ajo duhet të përfshijë konstantet themelore c (shpejtësinë e dritës), $\hbar$ (konstantja e reduktuar e Planck-ut) dhe G (konstantja gravitacionale e Njutonit).

Dihet se gjatësia e Planck-ut është:

$$l_p = \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} = 1.6 \times 10^{-33} \text{ cm}$$

Shkalla e Planck-ut është parë si një vlerësim i përafërt i shkallës themelore e gjatësisë së fijeve.

Eksperimentet me energji më poshtë energjisë së Planck-ut nuk mund të zgjidhin distancat si pjesë e gjatësisë së Planck-ut. Kështu, në energjitë të tilla, fijet mund të përafrohen me saktësi si pika. Kjo shpjegon pse teoria kuantike e fushës ka qenë aq e suksesshëm për të përshkruar botën tonë.

1.6.2 Fijet e hapura dhe fijet e mbyllura

Kemi dy lloje fijesh: fije të hapura dhe fije të mbyllura. Fijet e hapura kanë dy pika fikse, ndërsa fijet e mbyllura nuk kanë pika fikse. Ka teori vetëm me fije të mbyllura, dhe teori me të dyja fijet, të hapura dhe të mbyllura. Meqënëse fijet e hapura zakonisht mund të mbyllen për të formuar fijet e mbyllura, ne nuk i konsiderojmë teoritë vetëm me fije të hapura.

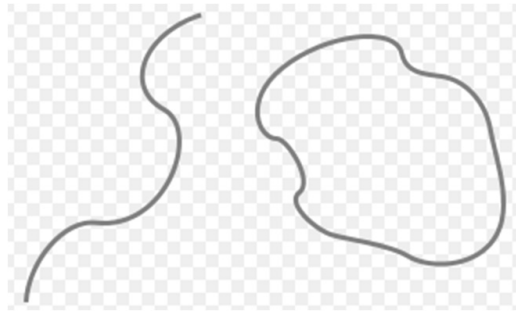


FIGURA 1.14: Fijet e hapura dhe fijet e myllura

1.7 Llojet e teorive të fijeve

Shfaqen pesë lloje të ndryshme të teorisë së fijos:

Teoria e Fijeve Bozonike. Teoria e fijeve Bozonike është versioni original i Teorisë së Fijeve, i zhvilluar në fund të viteve 1960. Është quajtur kështu sepse përmban vetëm bozone. Ajo përfshin të dy llojet e fijeve: të hapura dhe të mbyllura dhe kërkon 26 dimensione hapësirë-kohë për qëndrueshmëri dhe nuk ka supersimetri sepse në këtë teori nuk ka fermione. Megjithatë, Teoria e Fijeve bozonik mbetet një model shumë i dobishëm për të kuptuar shumë tipare të përgjithshme të teorive të tjera të fijeve.

Llojit I i Teorive të Fijeve. Ky version i teorisë së fijos përfshin bozonet dhe fermionet. Bashkëveprimet e grimcave përfshijnë supersimetrinë dhe një grup matës $SO(32)$. Kjo teori kërkon 10 dimensione hapësirë-kohë për qëndrueshmëri.

Lloji i II-A i Teorive të Fijeve. Ky version i teorisë së fijos gjithashtu përfshin supersimetrinë dhe ka fijet e hapura dhe të mbyllura. Fijet e hapura në tipin II-A të teorisë së fijos kanë skajet e tyre bashkangjitur me objekte të dimensioneve të larta të quajtura D-Brane.

LLoji II-B i Teorive të Fijeve. Është njëlloj si tipi i II-A, por ajo ka fermionet jo simetrike.

Teoria e Fijes Heterotike. Përfshin supersimetrinë dhe ka vetëm fijet e mbyllura. Ka një grup matës të quajtur $E8 \times E8$. Ajo kërkon një numër të ndryshëm të dimensioneve hapësirë-kohë (10 dhe 26).

Nënndarja e dytë është ndërmjet Teorive së Fijeve Bozonik dhe Teorive Superfijeve.

Fijet bozonike ekzistojnë në 26 dimensione, dhe të gjitha vibrimet e tyre përfaqësojnë bozonet. Meqë ato nuk kanë fermione, Teoritë e Fijeve bozonik nuk janë reale. Megjithatë, ato janë shumë më të thjeshtë sesa superfijet, dhe shumica e koncepteve të rëndësishme në teorinë e fijeve mund të shpjegohet në kontekstin e Fijeve Bozonik.

Superfijet ekzistojnë në dhjetë dimensione hapësirë-kohë, dhe spektri i tyre i gjendjeve përfshin bozonet dhe fermionet. Në fakt, këto dy grupe të grimcave janë të lidhura me supersimetrinë. Supersimetria për këtë arsye është një përbërës i rëndësishëm në Teorinë e Fijeve. Të gjitha modelet realiste të Teorive të Fijeve janë ndërtuar nga superfijet. Në të gjitha teoritë e fijeve gravitoni duket si një menyrë vibrimi për fijet e mbyllura.

Para 1995, teoricienët besonin se ishin vetëm pesë versionet e mësipërme të Teorisë së Fijeve. Ky kuptim ndryshoi në vitin 1995 kur Edward Witten sugjeroi se pesë teoritë ishin vetëm raste të veçanta kufizuese të një teori njëmbëdhjetë dimensionale të quajtur M-Teori. Aktualisht, kjo teori mbetet misterioze.

1.7.1 Graviteti

Tipari i parë i përgjithshëm i Teorisë së Fijeve, dhe ndoshta më i rëndësishmi, është se Relativiteti i Përgjithshëm është i përfshirë natyrshëm në këtë teori. Teoria modifikohet në distanca shumë të shkurtër (energji të larta), por në distanca të zakonshme energjia e pranishme është pikërisht në formën e propozuar nga Ajnshtajn-i. Kjo është e rëndësishme, për shkak se Relativiteti i Përgjithshëm lind në kuadër të një teorie të qëndrueshme kuantike. Zakonisht teoria e fushës kuantike nuk lejon që graviteti të ekzistojnë, ndërsa Teoria e Fijeve e kërkon atë.

1.7.2 Supersimetria

Një tipar i rëndësishëm i Teorisë së Fijeve është se qëndrueshmëria e saj kërkon supersimetri, kjo është një simetri që lidhet bozonet të fermionet, por ekzistojnë dhe Teori të Fijeve Bosonik josimetrik. Konsistenca matematikore e Teorisë së Fijeve me fermione varet nga supersimetri lokale. Supersimetria është një tipar i përgjithshëm i të gjitha teorive realiste të fijeve. Supersimetria hapësirë-kohë është një nga parashikimet më të mëdha të Teorisë superfijeve. Një shumëllojshmëri e argumenteve, jo specifike për Teorinë e Fijeve, sugjerojnë se shkalla karakteristike e energjisë që lidhet me thyerjen e supersimetrisë duhet të jetë e shkallës 100GeV .

Kapitulli 2

Ekuacionet e lëvizjes

Për të formuluar dinamikën e një sistemi ne duhet të shkruajmë ekuacionet e lëvizjes ose ndryshe, një veprim. Një përshkrim i plotë për fijen relativiste kërkon të njihet fizika bazë e fijeve jorelative. Këto fije kanë masë dhe tension. Ato mund të lëkunden në mënyrë tërthore dhe gjatësore. Në këtë paragraf do të japim ekuacionet e lëvizjes për fijen jorelative.

2.1 Ekuacionet e lëvizjes për lëkundjet tërthore

Në fillim shohim luhatjet tërthore të një fijeje të zgjatur. Drejtimi përgjatë fijeje quhet drejtim gjatësor, ndërsa drejtimi pingul me fijen quhet drejtim tërthor. Për thjeshtësi do të shohim rastin kur ka vetëm një drejtim.

Punojmë në planin (x, y) . Le të jetë fija klasike jorelative që ka pikat fikse të saj në $(0, 0)$, dhe $(a, 0)$. Në gjendjen statike fija është shtrirë përgjatë boshtit x ndërmjet këtyre pikave. Në lëkundjet tërthore, koordinata x e çdo pikë të fije nuk ndryshon në lidhje me kohën. Zhvendosja tërthore e një pike jepet nga koordinata y e saj.

Për të përshkruar mekanikën klasike të një fijeje homogjene, ne kemi nevojë për dy pjesë të informacionit: tensionin T_0 dhe m masën për njësi të gjatësisë μ_0 . Masa e përgjithshme e fijeje është:

$$M = \mu_0 \cdot a$$

Dimë se tensioni ka njësi të forcës, kështu që:

$$[T_0] = [Forcë] = \frac{Energji}{L}$$

Nëse ne shtrijmë një fije në një vlerë pambarimisht të vogël dx , tensioni i saj mbetet përafërsisht konstant përgjatë tendosjes dhe ndryshimi i energjisë është i barabartë me punën e bërë $T_0 dx$. Masa totale e fijes nuk ndryshon. Duke përdorur barazimin më sipër, dhe duke parasysh njësinë e energjisë dhe njësinë e μ_0 (masës sipas njësisë së gjatësisë) kemi:

$$T_0 = \frac{M}{L} [v^2] = [\mu_0 v^2]$$

Për një fije jorelativiste, T_0 dhe μ_0 janë parametra të rregullueshme, dhe shpejtësia në anën e djathtë lart do të jetë shpejtësia e valëve tërthore. Ekuacioni më sipër sugjeron se tensioni T_0 i fijes dhe masa μ_0 e një fijeje relativiste jepet nga ekuacioni:

$$T_0 = \mu_0 c^2$$

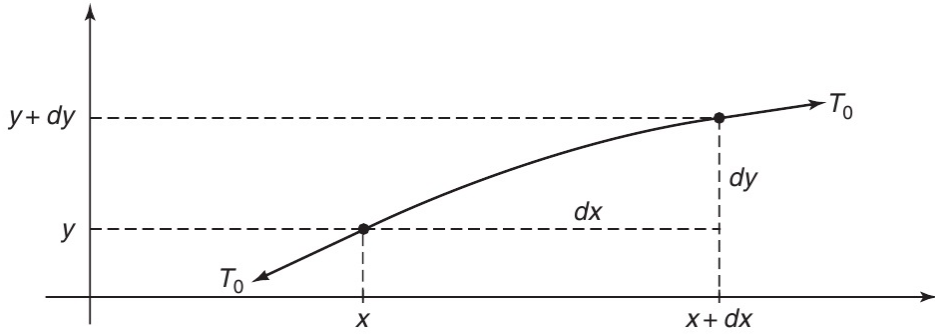


FIGURA 2.1: Një pjesë e shkurtër nga një fije klasike jo relativiste që lëkundet pingul me lëvizjen.

Kthehemi në rastin e fijes sonë klasike jorelativiste dhe të japim ekuacionin e lëvizjes. Marrim një pjesë të vogël të fijeje statike që shtrihet nga x në $x + dx$, me $y = 0$. Kjo pjesë është treguar në figurën 2.1. Në kohën t , zhvendosja tërthore e fijes është $y(t, x)$ dhe $y(t, x + dx)$ në $x + dx$. Ne do të supozojmë se luhatjet janë të vogla dhe nga kjo rrjedh se:

$$\frac{\partial y}{\partial x} \ll 1.$$

Kjo garanton që zhvendosja tërthore e fijes është e vogël në krahasim me gjatësinë e saj. Gjatësia e fijes ndryshon shumë pak dhe ne mund të supozojmë se tensioni T_0 është i pandryshuar.

Pjerrësia e fijes ndryshon pak në pikat x dhe $x+dx$. Ky ndryshim i pjerrësisë do të thotë se tensioni i fijes ndryshon drejtimin dhe pjesa e fijes në shqyrtim mendohet si një forcë neto. Për luhatjet e tërthorta ne duhet të llogaritim vetëm forcën vertikale neto; forca horizontale neto është e papërfillshme.

Forca vertikale në $(x+dx, y+dy)$ është dhënë nga T_0 herë $\frac{\partial y}{\partial x}$; në mënyrë të ngjashme, forca vertikale në (x, y) është T_0 herë $\frac{\partial y}{\partial x}$.

Prandaj forca vertikale F_v është:

$$dF_v = T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+dx} - T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \cong T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

Masa dm e kësaj pjese të fijes, që shtrihej fillimisht nga x në $x+dx$, është dhënë nga densiteti i masës μ_0 herë dx .

Sipas ligjit të dytë të Njutonit, forca vertikale totale është e barabartë me masën herë nxitimin vertikal. Pra, ne thjesht mund të shkruajmë:

$$T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = \mu_0 dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Thjeshtojmë dx në çdo anë dhe marrim:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu_0}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Ky është një ekuacion vale. Kujtojmë se për ekuacionin e valës

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

parameteri v_0 është shpejtësia e saj. Kështu, për valët tërthore në fijen tonë të shtrirë, shpejtësia e valës është:

$$v_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}.$$

Sa më i madh të jetë tensioni apo sa më e lehtë fija, aq më shpejt lëvizin ato.

2.1.1 Kushtet kufitare dhe kushtet fillestare

Ekuacioni i gjetur më sipër është një ekuacion diferencial i pjesshëm në lidhje me hapësirën dhe kohën. Në mënyrë që të gjendet një zgjidhje ne në përgjithësi

duhet të zbatojmë dy kushte: kushtet kufitare dhe kushtet fillestare.

Kushtet kufitare (BC) përmbajnë zgjidhje në kufirin e sistemit, ndërsa kushtet fillestare kufizojnë zgjidhjet në një kohë të caktuar fillestare. Llojet më të zakonshme të kushteve kufitare janë kushtet kufitare Dirichlet dhe Neumann.

Për fijen tonë, kushtet kufitare Dirichlet specifikojë pozicionet e fijos në pikat fikse. Për shembull, në qoftë se ne fiksojmë fundin e një fijeje në një mur (figura 2.2, majtas), ne jemi në kushtet kufitare Dirichlet:

$$y(t, x = 0) = y(t, x = a) = 0$$

Përndryshe, në qoftë se fijet pa masë janë të lira të rrëshqasin përgjatë dy boshteve, ne jemi në kushtet kufitare Neumann.

Për fijen tonë, kushtet kufitare Neumann specifikojnë vlerat e derivatit të pjeshmëm $\frac{\partial y}{\partial x}$ në pikat fikse. Meqënëse laqet janë pa masë, derivati $\frac{\partial y}{\partial x}$ duhet të anulohet në polet $x = 0$ dhe $x = a$ (figura 2.2, djathtas).

Nëse kjo nuk ishte kështu, atëherë pjerrësia e fijos në një pol do të ishte jo zero, dhe një komponente e tensionit të fijos do të përshpejtonte unazën në drejtim të y-it. Meqë çdo unazë është pa masë, nxitimi i tyre do të jetë i pafund. Kjo nuk është e mundur, kështu që, jemi në kushtet kufitare Neumann.

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t, x = 0) = \frac{\partial y}{\partial x}(t, x = a) = 0.$$

Kushtet kufitare Neumann zbatohen për fijet me pikat fikse të cilat janë të lira për të lëvizur përgjatë drejtimit y .

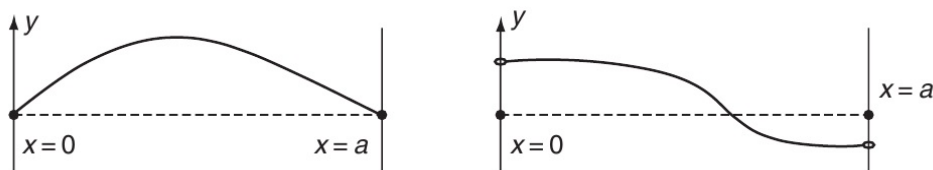


FIGURA 2.2: Majtas: fije me kushte kufitare Dirichlet. Djathtas: fije me kushtet kufitare Neumann

Le të shohim se si ne mund të zgjidhim ekuacionin e valës për një grup të veçantë të kushteve fillestare. Zgjidhja e përgjithshme e ekuacionit më sipër është e formës:

$$y(t, x) = h_+(x - v_0 t) + h_-(x + v_0 t) \quad (2.1)$$

ku h_+ dhe h_- janë funksione arbitrare të një variabli të vetëm. Kjo zgjidhje përfaqëson një mbivendosje të dy valeve, h_+ lëviz në të djathtë dhe h_- lëviz në të majtë.

Supozomë se vlerat fillestare të y -it dhe $\frac{\partial y}{\partial x}$ janë të njohura në kohën $t = 0$

Duke përdorur ekuacionin (2.1) ne shohim se ky informacion jep ekuacionet:

$$y(0, x) = h_+(x) + h_-(x) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0, x) = -v_0 h'_+(x) + v_0 h'_-(x) \quad (2.3)$$

ku funksionet në anën e majtë janë të njohur dhe "primi" tregon derivatin në lidhje me argumentet.

Ne mund të zgjedhim si drejtim nga h_- në h_+ . Duke zëvendësuar 2.2 në ekuacionin 2.3 ne do të marrim një ekuacion diferencial të zakonshëm të rendit të parë për h_+ .

Pasi ta kemi zgjidhur ekuacionin për h_+ , duke përdorur kushtet e duhura kufitare, ne mund të përdorim përsëri ekuacionin 2.2, këtë herë për të gjetur një formë eksplicite të h_- . Me h_+ dhe h_- të njohura, zgjidhja e plotë e ekuacionit të lëvizjes është dhënë nga ekuacioni i valës.

2.1.2 Frekuenca e lëvizjes transvesale

Supozojmë se kemi një fije ku secila pikë lëkundet në mënyrë sinusoidale në drejtimin y . Kjo nënkupton se $y(t, x)$ është i formës:

$$Y(t, x) = y(x) \sin(\omega t + \phi), \quad (2.4)$$

ku ω është frekuenca këndore e lëkundjes dhe ϕ është faza konstante e përbashkët.

Qëllimi ynë është për të gjetur frekuencat e lejuara të lëkundjes. Duke zëvendësuar ekuacionin 2.4 tek ekuacioni i valës dhe duke bërë thjeshtimet, ne gjejmë:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \omega^2 \frac{\mu_0}{T_0} y(x) = 0. \quad (2.5)$$

Ky është një ekuacion diferencial i zakonshëm i rendit të dytë për lëkundjet e $y(x)$. Meqë ω , μ_0 dhe T_0 janë konstante, ekuacioni diferencial është zgjidhur në kushtet e funksioneve trigonometrike. Me kushtet kufitare Dirichlet ne kemi një zgjidhje jotriviale

$$y_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

ku A_n është një konstante e çfarëdoshme.

Vlera $n = 0$ nuk është përfshirë më sipër, sepse ajo përfaqëson një fije të palëvizshme. Duke u bazuar në ekuacionin 2.5, ne gjejmë frekuencat e lejuara:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}} \left(\frac{n\pi}{a}\right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Këto janë frekuencat e lëkundjes për një fije Dirichlet. Telat mbi një violinë janë fijet Dirichlet. Për të marrë një melodi me frekuencë të saktë duhet të rregullojmë tensionin e telave. Tensioni më i lartë është në pikën më të lartë, siç parashikohet nga ekuacioni 2.7.

Për rastin e kushteve kufitare Neumann, ne marrim zgjidhjet hapësinore

$$y_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Në këtë rast zgjidhja $n = 0$ tregon se fijet nuk luhaten, $y(t, x) = A_0$. Frekuencat e luhatjes, të dhëna nga ekuacionet 2.7 dhe 2.4, janë të njëjta me ato në ekuacionin 2.6. Prandaj, frekuencat janë të njëjta si në problemet e Neumann-it dhe Dirichlet-ut.

2.1.3 Më shumë përgjithësime për fijet lëkundëse

Le të diskutojmë shkurtimisht disa probleme që janë të lidhura ngushtë me ato që përshkruam deri tani. Për shembull, ne mund të marrim densitetin e fijes si

funksion i pozicionit $\mu(x)$. Forma e ekuacionit të valës nuk ndryshon. Shqyrtojmë një pjesë të vogël të fijes, kështu që densiteti i masës është përafërsisht konstant. Prandaj, ne do të kemi:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\mu(x)}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (2.9)$$

Për luhatjet normale, ne përdorim ekuacionin 2.4 dhe gjejmë:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\mu(x)}{T_0} \omega^2 y(x) = 0. \quad (2.10)$$

Ky ekuacion nuk është i thjeshtë për t'u zgjidhur, dhe ai mund të studiohet në detaje vetëm nëse funksioni $\mu(x)$ është i përcaktuar.

Deri tani kemi shqyrtuar vetëm fijet që luhaten tërthorazi, por fijet gjithashtu mund të lëkunden edhe në mënyrë gjatësore. P.sh. në qoftë se një fije është shtrirë përgjatë boshtit të x-eve, dhe marrim një segment pambarimisht të vogël që në ekuilibër shtrihet nga x në $x + dx$. Supozojmë tani se në kohën t skajet e këtij segmenti pambarimisht të vogël janë zhvendosur në mënyrë gjatësore, nga pozicionet e tyre të ekuilibrit nga distanca $\eta(t, x)$ dhe $\eta(t, x + dx)$, përkatësisht. Nëse këto dy madhësi nuk janë të njëjta, pjesa e fijes ka ndryshuar, prandaj mund të merret një ekuacion lëvizjeje për këtë sistem, njëlloj si u veprua me lëvizjen tërthore.

2.2 Veprimi jorelativist

Dimë se lagranzhiani L i një sistemi përcaktohet nga ekuacioni

$$L = T - V$$

ku T është energjia kinetike e sistemit dhe V është energjia potenciale e tij. Për një grimcë me masë m që lëviz përgjatë boshtit x nën ndikimin e një potenciali $V(x)$ me kohë të pavarur, Lagranzhiani jorelativist merr formën:

$$L(t) = \frac{1}{2} m (\dot{x}(t))^2 - V(x(t)), \quad \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Ne duhet të theksojmë se Lagranzhiani më sipër është padyshim një funksion implicit i kohës, por ai nuk ka varësi eksplicite të kohës. Të gjitha varësitë

nga koha lindin nga varësia kohore e pozicionit $x(t)$.

Veprimi S është përcaktuar si:

$$S = \int_{\varphi} L(t) dt$$

ku φ është një rrugë $x(t)$ midis pozicioneve fillestare x_i në një kohë fillestare t_i dhe në pozicionin e fundit x_f në një kohë përfundimtare t_f . Një rrugë e tillë është paraqitur në figurën 2.3 më poshtë.

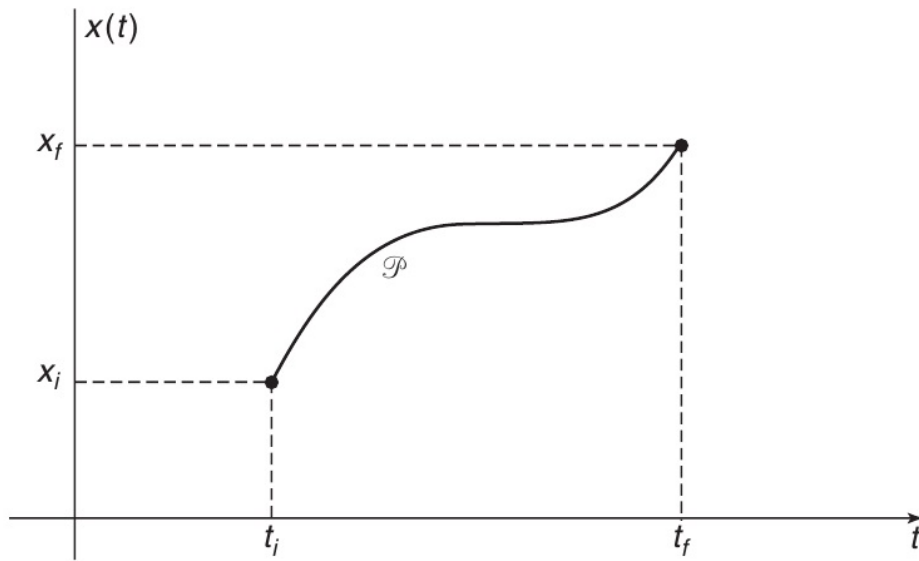


FIGURA 2.3: Rrugë e lëvizjes së një pjesëze gjatë kohës $[t_i, t_f]$.

Veprimi është funksional. Kur një funksion i një variabli të vetëm merr një numër si argument (si input) dhe jep një numër tjetër si output, një funksional merr një funksion si input dhe i jep një numër si output. Në aplikacionin tonë, si input për veprimin funksional është funksioni $x(t)$, i cili përcakton rrugën φ . Ne mund të theksojmë argumentin e S duke përdorur simbolin $S[x]$.

Këtu $[x]$ përfaqëson të gjitha funksionet $x(t)$. Më shumë në mënyrë eksplicite, për çdo rrugë $x(t)$, veprimi është dhënë nga ekuacioni:

$$S[x] = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} m (\dot{x}(t))^2 - V(x(t)) \right\} dt.$$

Është shumë e rëndësishme të theksohet se veprim S mund të llogaritet për çdo rrugë $x(t)$ dhe jo vetëm për rrugët që përfaqësojnë lëvizjen fizike. Kjo është për shkak se S mund të llogaritet për çdo rrugë dhe ky është një mjet shumë i fuqishëm për të gjetur rrugët që mund të realizohen fizikisht.

Parimi i Hamilton-it tregon se rruga φ që një sistem ndjek është një rrugë në të cilën veprimi S është stacionar. Përsa i përket funksionit $x(t)$ i cili specifikon rrugën, rruga e trazuar merr formën $x(t) + \delta x(t)$, sic tregohet në figurën 2.4. Për çdo kohë t , variacioni $\delta x(t)$ është distanca vertikale ndërmjet rrugës origjinale dhe rrugës së ndryshueshme.

Sic shihet në figurë, tregojmë variacionet ku pozicionet fillestare dhe përfundimtare janë të pandryshuara:

$$\delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0.$$

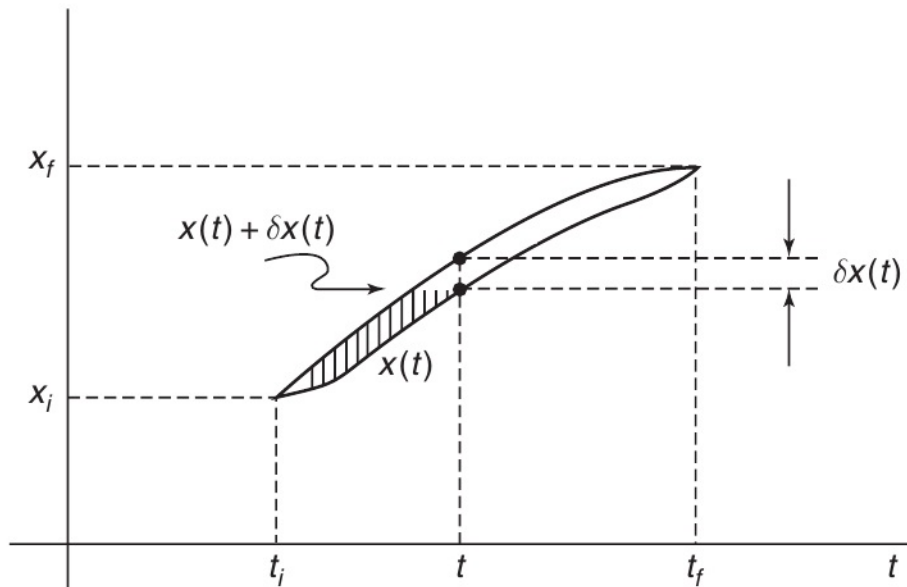


FIGURA 2.4: Një rrugë $x(t)$ dhe variacioni i saj $x(t) + \delta x(t)$.

Tani ne do ta përgjithësojmë këtë për të përfshirë grimcat relativiste.

2.3 Fijet relativiste

Në rastin e grimcës relativiste nuk është e lehtë për të shkruar ekuacionet e lëvizjes. Por veprimi është sa fizik dhe gjeometrik. Të frymëzuar nga rasti i pikës materiale, shohim sipërfaqen e gjurmës së lënë nga fija që lëviz në hapësirë-kohë.

2.3.1 Zona funksionale për sipërfaqet hapësinore

Veprimi për një fije relativiste duhet të jetë një funksion i trajektores së fijes. Ashtu si një grimcë që nga lëvizja në hapësirë-kohë lë si "gjurmë" një vijë, ndërsa një fije lë si gjurmë një sipërfaqe dydimensionale. Kjo sipërfaqe në hapësirën dy dimensionale quhet world-sheet

Një fije e mbyllur, për shembull, do të lërë si gjurmë një tub, ndërsa një fije e hapur do të lë një shirit. Këto janë treguar në diagramin e hapësirë-kohës së figurën 2.5. Vijat e vazhdueshme në këto sipërfaqe janë fijet. Këto janë objekte që vëzhgohen në kohë fikse. Ato janë kurba të hapura për sipërfaqet që përshkruan një fije e hapur (majtas), dhe kurba të mbyllura për sipërfaqen e përshkruar lëvizja e fijeve të mbyllura (djathtas).

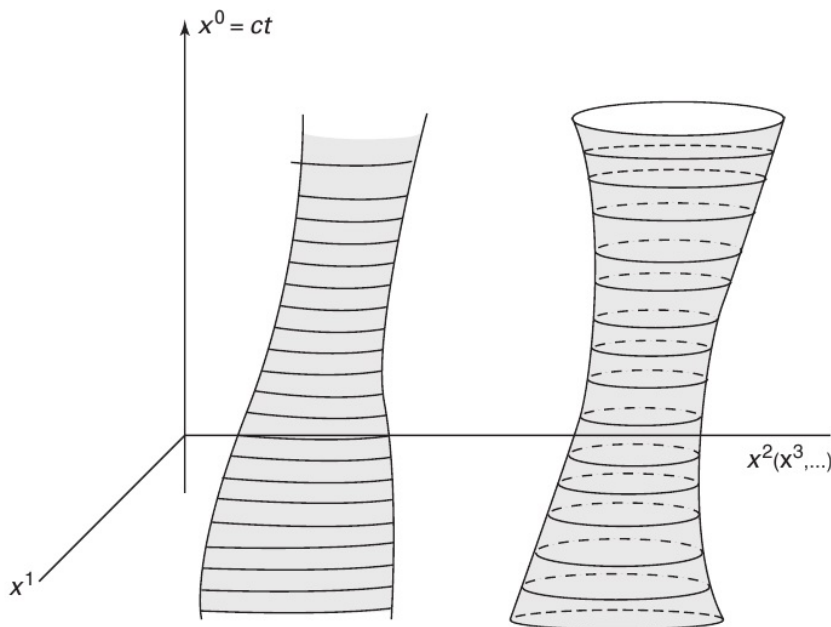


FIGURA 2.5: World-sheet e një fijeje të hapur (majtas) dhe e një fijeje të mbyllur (djathtas).

Zonat funksionale janë të dobishme dhe në aplikime të tjera: një film sapuni ndërmjet dy unazave, për shembull, ndërton automatikisht zonën me sipërfaqe minimale (si në figurën 2.6).

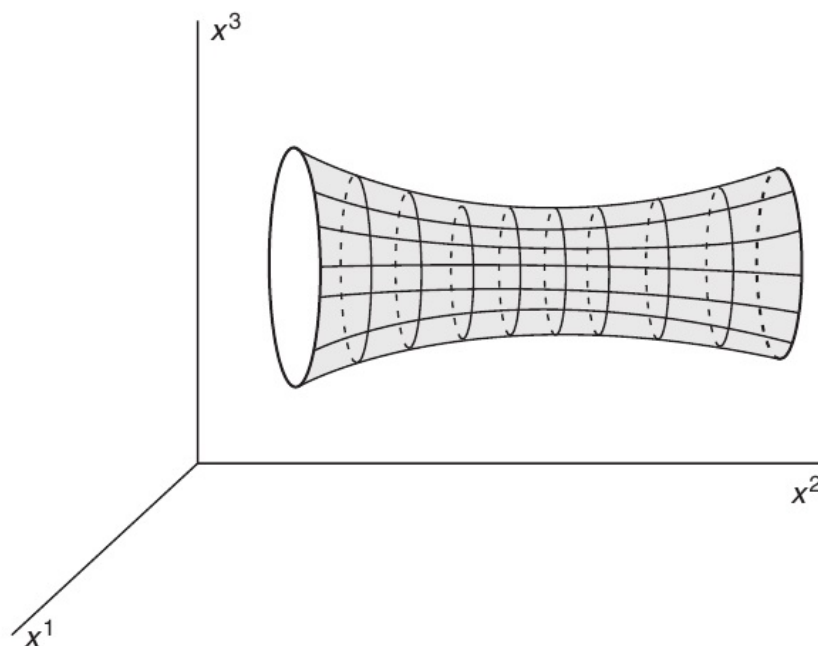


FIGURA 2.6: Një sipërfaqe hapësinore që shtrihet midis dy unazave.

Ne dimë nga relativiteti se lëvizja e një pike materiale është proporcionale me kohën e duhur për të kaluar në pikë materiale në lëvizjen një përmasore. Koha e duhur, e shumëzuar me c , është "gjatësia e duhur" e invariante së Lorencit e lëvizjes njëpërmasore. Për fije ne do të përcaktojmë "zonën e duhur" e invariante së Lorencit e hapësirës dypërmasore. Veprimi i fijos relativiste do të jetë proporcionale me këtë zonë të duhur, dhe është quajtur veprimi Nambu-Goto.

Një vijë në hapësirë mund të parameterizohet duke përdorur vetëm një parametër. Një sipërfaqe në hapësirë është dydimensionale, kështu që ajo kërkon dy parametra ξ^1 dhe ξ^2 .

Këto vija mbulojnë sipërfaqen me një "rrjetë". Ne këtë e quajmë hapësirë e synuar dydimensionale. Në rastin e një flluske sapuni, hapësira është tredimensionale x^1 , x^2 dhe x^3 .

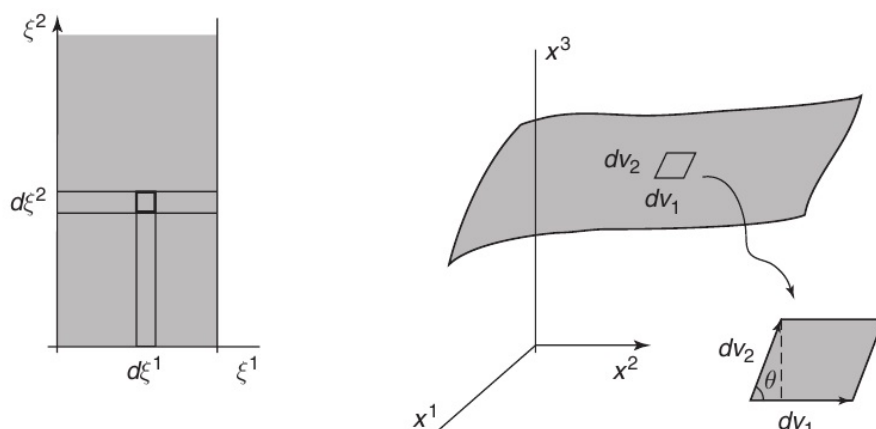


FIGURA 2.7: Majtas: Parametri hapësirë. Djathtas: Sipërfaqja e hapësirës së synuar; një paralelogram ku brinjët e të cilit janë vektorët $d\vec{v}_1$ dhe $d\vec{v}_2$

Parametrizimi i sipërfaqes jepet nga ekuacioni:

$$\vec{x}(\xi^1, \xi^2) = (x^1(\xi^1, \xi^2) + x^2(\xi^1, \xi^2) + x^3(\xi^1, \xi^2))$$

Parametrizimi i hapësirës përcaktohet nga ξ^1 dhe ξ^2 . Ajo mund të jetë një katror, për shembull, në qoftë se përdorim parametrat $\xi^1, \xi^2 \in [0, \pi]$. Sipërfaqet fizike janë imazhi i parametrave hapësirë sipas pasqyrimin $\vec{x}(\xi^1, \xi^2)$, që është një sipërfaqe në plan. Përndryshe, ne mund të shikojmë parametrat ξ^1 dhe ξ^2 si koordinata në sipërfaqen fizike, të paktën lokalisht.

Lokalisht ky pasqyrim është bijektiv dhe ai i cakton çdo pike një sipërfaqe dy dimensionale me koordinata: vlerat e parametrave ξ^1 dhe ξ^2 .

Ne duam të llogaritim zonën e një elementi të vogël të sipërfaqes së planit. Le të fillojmë duke shikuar në një drejtkëndësh të vogël mbi plan. Treguar me anën e drejtkëndëshit $d\xi^1$ dhe $d\xi^2$, ne duam të gjejmë dA , zonën e imazhit të këtij drejtkëndëshi të vogël në plan. Siç tregohet në figurën 2.7, kjo zonë është një pjesë e sipërfaqes që korrespondon me drejtkëndësh të vogël të planit. Sigurisht, nuk ka arsye që një element pambarimisht i vogël i zonës në hapësirën e synuar të jetë drejtkëndësh. Në përgjithësi është një paralelogram. Le të shënojmë brinjët e këtij paralelogrami $d\vec{v}_1$ dhe $d\vec{v}_2$. Ata janë imazhe nën pasqyrimin e vektorëve $(d\xi^1, 0)$ dhe $(0, d\xi^2)$, përkatësisht.

Ne mund t'i shkruajmë ato si:

$$d\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1, d\vec{v}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2$$

Kjo ka këtë kuptim: $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}$, për shembull, përfaqëson shkallën e ndryshimit të planit koordinativ në lidhje me ξ^1 . Po të shumëzojmë këtë shkallë me gjatësinë e brinjës horizontale të drejtkëndëshit të vogël $d\xi^1$ na jep vektorin $d\vec{v}_1$ që përfaqëson zonën e caktuar të planit. Ne mund të llogaritim dA duke përdorur formulën për syprinën e paralelogramit:

$$dA = |d\vec{v}_1| \cdot |d\vec{v}_2| \cdot |\sin\theta| = |d\vec{v}_1| \cdot |d\vec{v}_2| \cdot \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{|d\vec{v}_1| \cdot |d\vec{v}_2| - |d\vec{v}_1| \cdot |d\vec{v}_2| \cdot \cos^2\theta}$$

ku θ është këndi ndërmjet vektorëve $d\vec{v}_1$ dhe $d\vec{v}_2$.

Po të bazohemi te prodhimi skalar i vektorëve kemi:

$$dA = \sqrt{(d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1)(d\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2) - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2}$$

Po të zëvendësojmë $d\vec{v}_1$ dhe $d\vec{v}_2$:

$$dA = d\xi^1 \cdot d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right)\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right)^2}$$

Kjo është shprehje e përgjithshme për zonën e një sipërfaqeje të parametrizuar në plan.

Sipërfaqja e plotë është dhënë nga ekuacioni:

$$A = \int d\xi^1 \cdot d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right)\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right)^2}$$

Zgjidhja e problemit të zonës minimale për një sipërfaqe hapësinore është funksioni $\vec{x}(\xi^1, \xi^2)$ që minimizon funksionin A .

2.3.2 Riparametrizimi i sipërfaqes

Parameterizimi i një sipërfaqeje na lejon për të përshkruar zonën në një formë më të qartë. Syprina e sipërfaqes, ose edhe syprina e çdo pjese të sipërfaqes, duhet të jetë e pavarur nga parameterizimi i zgjedhur për të llogaritur atë. Kjo do të thotë se zona duhet të riparametrizohet në mënyrë invariante. Kjo do

të thotë se do të jemi të lirë të zgjedhim parametrizimin më të dobishëm pa ndryshuar fizikën themelore. Një zgjedhje e mirë e parametrizimit do të na mundësojë për të zgjidhur ekuacionet e lëvizjes së fijos relativiste në një mënyrë sa më të thjeshtë.

Ne duhet të tregojmë se zona funksionale A duket të jetë një riparametrim invariant.

Riparametrizimi më sipër, megjithatë, nuk është plotësisht i përgjithshëm, sepse nuk arrin të përfshijë koordinatat ξ^1 dhe ξ^2 . Supozojmë, në vend të kësaj, se duhet të bëjmë riparametrimin duke përdorur $\tilde{\xi}^1(\xi^1, \xi^2)$ dhe $\tilde{\xi}^2(\xi^1, \xi^2)$.

Për të bërë riparametrimin invariant ne do të kemi për të rishkruar zonën funksionale në një mënyrë tjetër.

$$d\xi^1 d\xi^2 = \left| \det\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^j}\right) \right| d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 = |\det(M)| d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2$$

ku $[M] = [M_{i,j}]$ është matrica e përkufizuar nga

$$[M_{i,j}] = \frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^j}$$

Njëlloj përkufizojmë:

$$d\xi^1 d\xi^2 = \left| \det\left(\frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j}\right) \right| d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 = |\det(\tilde{M})| d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2$$

ku $[M] = [M_{i,j}]$ është matrica e përkufizuar nga

$$[\tilde{M}] = [\tilde{M}_{i,j}] = \frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j}$$

Duke kombinuar dy barazimet më sipër kemi që:

$$|\det M| |\det \tilde{M}| = 1$$

Le të konsiderojmë një sipërfaqe të caktuar S_i që përshkruhet nga funksionet $\vec{x} = (\xi^1, \xi^2)$ dhe

le të marrim një vektor tangjent $d\vec{x}$ në sipërfaqe, dhe le të shënojmë me ds gjatësia e tij. Atëherë ne mund të shkruajmë:

$$ds^2 \equiv (ds)^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x}$$

Vektori $d\vec{x}$ mund të shprehet në termat e derivate të pjesshme dhe me diferenciale $d\xi^1 d\xi^2$

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i$$

Duke zëvendësuar më sipër kemi:

$$ds^2 = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} d\xi^j \right) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j$$

Kjo mund të përmblihet si:

$$ds^2 = g_{i,j}(\xi) d\xi^i d\xi^j$$

ku

$$g_{i,j}(\xi) \equiv \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j}.$$

Funksioni $g_{i,j}(\xi)$ është quajtur: *metrika e induktuar mbi S_i* . Kjo është një metrikë në S_i , sepse ξ^i luan rolin e koordinatave në S_i .

Në qoftë se kemi vetëm dy parametra ξ^1 dhe ξ^2 matrica $g_{i,j}$ ka formën:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \end{bmatrix}$$

Përcaktori i G – së është pikërisht madhësia që duket nën rrënjën katrore në ekuacion.

Le të jetë $g = \det(g_{i,j})$

Ne mund të shkruajmë se:

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g}$$

Tani mund të tregojmë invariancën e riparametrizimit të zonës duke u bazuar te metrika g_{ij} . Po të marrim një bashkësi tjetër parametrash $\hat{\xi}$ dhe kemi:

$$g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j = \tilde{g}_{p,q}(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi}^p d\tilde{\xi}^q$$

Shprehim diferencialet e $d\tilde{\xi}$ në varësi të diferencialeve $d\xi$ dhe duke përkufizimin e $\tilde{M}$ kemi:

$$g_{ij}(\xi) = \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi}) \tilde{M}_{pi} \tilde{M}_{qj} = (\tilde{M}^T)_{ip} \tilde{g}_{pq} \tilde{M}_{qj}.$$

Po të bëjmë veprimet kemi:

$$g = (\det \tilde{M}^T) \tilde{g} \det \tilde{M} = \tilde{g} (\det \tilde{M})^2.$$

duke marrë rrënjën katrore të g dhe duke bërë të gjitha zvendësimet kemi:

$$\int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g} = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\tilde{g}}$$

Kjo tregon se riparametrizimi i zonës funksionale është invariant.

2.3.3 Zona funksionale për sipërfaqet e hapësirë-kohës

Shqyrtojmë rastin tonë, rastin e sipërfaqeve në hapësirë-kohë. Këto sipërfaqe janë fituar duke përfaqësuar rrugën e lëvizjes së fijos në hapësirë-kohë, në të njëjtën mënyrë si ekuacioni i vijës që përfaqëson historinë e lëvizjes së një grimce në hapësirë-kohë. Për rastin e fijos, ne do të marrim një sipërfaqe dydimensionale e quajtur "world-sheet" i fijeve. Sipërfaqet e fijos në hapësirë-kohë (world-sheet-et), nuk janë të gjitha që të ndryshme nga sipërfaqet hapësinore të konsideruara në pjesën e mëparshme. Ato janë dy-dimensionale dhe kërkojmë dy parametra që i shënojmë parametrat ξ^i dhe ξ^j ; ne i emërtojmë ata me emra të veçantë: τ dhe σ .

Koordinatat e hapësirë-kohës zakonisht jepen $x^\mu = (x^1, x^2, \dots, x^d)$, ndërsa sipërfaqja është përshkruar nga funksionet $x^\mu(\tau, \sigma)$.

Ne do të shënojmë bashkësinë e funksioneve me lart me shkronjë të madhe

$$X^\mu(\tau, \sigma).$$

Githashtu ne nuk po e ndryshojmë kuptimin e funksioneve. Në qoftë se jepet një pikë fikse me koordinata $x^\mu = (\tau, \sigma)$ në parametrin hapësirë, kjo pikë pasqyrohet tek një pikë me koordinatat e hapësirë-kohës

$$(X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), X^2(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma)).$$

Ne vendosim shkronjën X i madh për arsien e mëposhtme:
Supozojmë se ne kemi përdorur të njëjtin simbol për të treguar koordinatat hapësirë-kohë dhe funksionet e pasqyrimit. Pastaj ne mund të dallojmë mes tyre duke shkruar x^μ ose $x^\mu(\tau, \sigma)$, por nuk do të mund të heqim argument (τ, σ) . Nga ana tjetër, te X^μ ne mund të heqim argumentet (τ, σ) dhe ende e dimë se ne po flasim për funksionet pasqyruese të fijes. Ne do t'i quajmë X^μ koordinata të fijes.

Si më lart, parametrat τ dhe σ mund të shihen si koordinata në plan, të paktën në nivel lokal. Fizikanët përdorin gjithashtu termin world-sheet për të treguar hapësirën dydimensionale. Nëse nuk shprehet në mënyrë të qartë, ne do të përdorim termin world-sheet për sipërfaqen e hapësirë-kohës. Në figurën 2.8 shqyrtojmë një fije të hapur: në të majtë tregohet një parametër hapësirë në plan dhe në të djathtë, një sipërfaqe hapësirë-kohë.

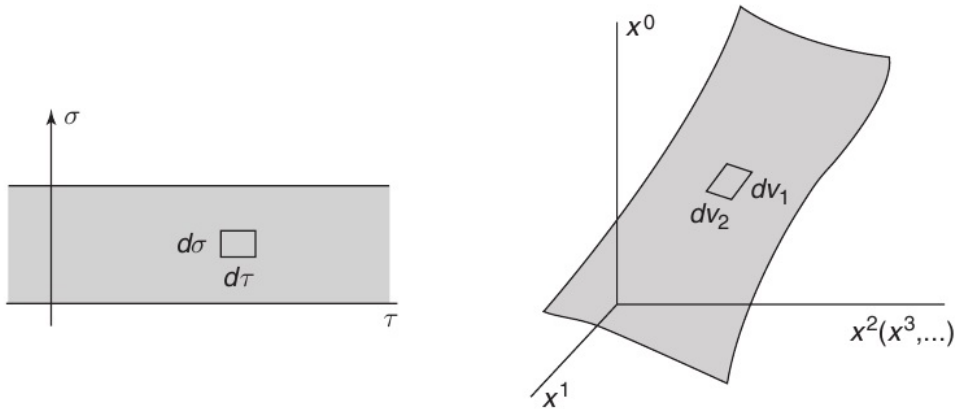


FIGURA 2.8: Majtas: parametrat hapësirë (τ, σ) . Djathtas: Sipërfaqja në hapësirë-kohën e synuar

Parametri τ është lidhur me parametrin kohë dhe parametri σ është i lidhur në pozicione përgjatë fijes. World-sheet në pika fikse të fijes kanë σ konstante, kështu që ata janë të parametrizuar nga τ .

Meqë τ ndryshon, të paktën në pika fikse kemi

$$\frac{\partial X^0}{\partial \tau} \neq 0$$

Ne do të supozojmë se kjo gjithashtu vlen edhe për vlerat e tjera të σ . Për të gjetur elementin e zonës ne vazhdojmë si në rastin e sipërfaqes hapësinore, këtë herë duke përdorur simbolet relativiste. Situata është ilustruar në figurën 2.7.

Një drejtkëndësh me brinjë $d\tau$ dhe $d\sigma$ në parametrin hapësirë bëhet katërkëndësh në hapësirë-kohë. Ky katërkëndësh është përcaktuar nga vektorët dv_1^μ dhe dv_2^μ . Për më tepër,

$$dv_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau \text{ dhe } dv_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma$$

që janë formulat analoge si më sipër.

Ne tani mund të përdorim analogun e figurës 2.7 për të përcaktuar zonën dA :

$$dA = \sqrt{(d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1)(d\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2) - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2}$$

ku shumëzimi është prodhimi skalar relativist. Duke përdorur këtë produkt skalar garantojmë se kjo zonë është invariantja e Lorencit.

Për të qenë në gjendje për të marrë rrënjën katrore ne duhet të shkëmbejmë dy terma nën rrënjën katrore. Ky ndryshim i shenjës nuk ka efekt në invariancën e Lorencit. Duke bërë këtë, dhe duke përdorur ekuacionet më sipër, ne gjejmë se zona jepet si:

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma}\right)}$$

Duke përdorur simbolet e produktit skalar relativist:

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2}. \quad (2.11)$$

Për të kuptuar pse shenja sipër është e saktë ne duhet të bindim veten se shprehja nën rrënjë katrore është pozitive në çdo pikë të planit të një fijeje. Ekziston një pohim që thotë "Për një sipërfaqe ku në çdo pikë P ka një drejtimin e kohor dhe një drejtim hapësinor shprehja nën rrënjë katrore në ekuacionin e mësipërm është gjithmonë pozitive", domethënë

$$\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma}\right) > 0$$

Po të shënojmë me $v^\mu(\lambda)$ bashkësinë e të gjithë vektorëve tangent në pikën P

$$v^\mu(\lambda) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$$

ku $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ është një parametër. Meqë $\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$ dhe $\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$ janë vektorë tangjent linearisht të pavarur, kur ne të ndryshojnë λ kemi marrë të gjithë vektorët tangjent në pikën P, me përjashtim të $\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$, i cili gjendet $\lambda \rightarrow \infty$ (figura 2.9).

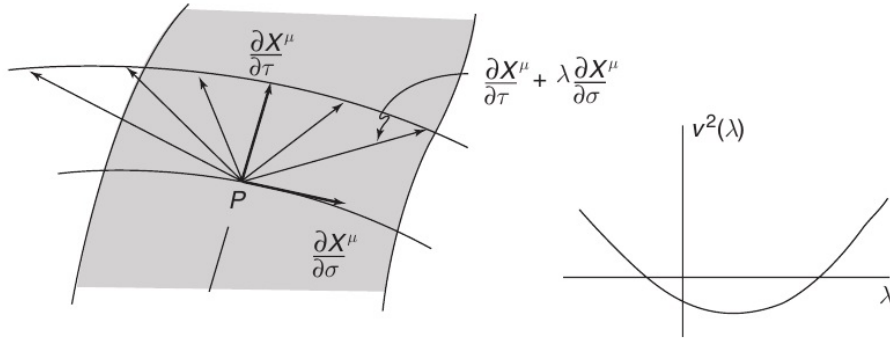


FIGURA 2.9: Majtas: Bashkësia e vektorëve $v(\lambda)$ tangjentë në një pikë P të Worl-sheet-it.

Nuk ka rëndësi në përcaktimin nëse vektori është kohor ose hapësinor. Për të përcaktuar nëse $v^\mu(\lambda)$ është kohor ose hapësinor, ne e marrim atë në katror:

$$v^2(\lambda) = v^\mu(\lambda)v_\mu(\lambda) = \lambda^2\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 + 2\lambda\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right) + \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2$$

Derivatet e X që shfaqen këtu janë vetëm numra, kështu që ne kemi një polinom kuadratik në X. Këtu kemi të dy përbërëset kohore dhe hapësinore në P, $v^2(\lambda)$ duhet të marrë të dy vlerat: si negative dhe vlerat pozitive kur ne të ndryshojnë λ . Me fjalë të tjera, ekuacioni $v^2(\lambda)$ duhet të ketë dy rrenjë reale. Meqë po të ndodhe kjo, dallori në ekuacion kuadratik duhet të jetë pozitiv. Ne shohim se

$$\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right)\left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma}\right) > 0$$

i cili tregon vërtetësinë e pohimit.

2.4 Veprimi Nambu-Goto

Tani që ne jemi të sigurt se zona e duhur funksionale është përkufizuar si duhet, ne mund futim veprimin për fijen relativiste. Këto veprime janë në përpjesëtim të drejtë me syprinën e lëvizjes. Ne duhet të shumëzojmë zonën funksionale nga disa konstante të përshtatshme. Zona funksionale në ekuacionin 2.11 ka njësi të gjatësisë në katror. Kjo është për shkak se X^μ ka njësitë e gjatësisë, dhe secili term në rrënjë katrore ka katër X-a. Njësitë e τ dhe σ zhduken. Çdo term në rrënjë katrore ka dy derivate të τ dhe dy derivate të σ . Këto njësi anullojnë njësitë e diferencialeve. Megjithatë, ne do të marrim σ të ketë njësinë e gjatësisë dhe τ njësinë e kohës. Ne e bëjmë këtë duke parashikuar një lidhje në mes kohës τ dhe pozicioneve σ .

Për ta përmbledhur:

$$[\tau = T], [\sigma = L], [X^\mu = L], [A = L^2]$$

Meqë S duhet të ketë njësi të ML^2/T dhe A ka njësinë L^2 , ne duhet të shumëzojmë zonën e duhur me njësitë e M/T . Tensioni i fijos T_0 ka njësi të forcës, dhe forca pjesëtohet nga shpejtësia ka njësitë e M/T . Për këtë arsye mund të shumëzojmë zonën e duhur nga T_0/c për të marrë njësitë e veprimit. Ne kemi veprimin e një fijeje të barabartë me:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_1}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}$$

ku $\sigma > 0$ është një konstante dhe shënimet e derivateve janë përkufizuar si me poshtë:

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \text{ dhe } (X^\mu)' \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$$

Natyrisht, ne nuk e kemi konfirmuar ende se simboli T_0 në veprimin e fijeje është saktë interpretimi i tensionit, por ne do ta bëjmë këtë më vonë. Ne gjithashtu do të tregojmë atje se shenja negative e cila shumëzon veprimin është e saktë.

Veprimi S është veprim Nambu-Goto për fijen relativiste. Është e rëndësishme që ky veprim të jetë riparametrizim invariant. Ne mund të vazhdojmë ashtu siç bëmë me sipërfaqen hapësinore për të shkruar veprimin Nambu-Goto

si riparametrizim invariant.

Në këtë rast kemi:

$$-ds^2 = dX^\mu dX_\mu = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

Këtu $\eta_{\mu\nu}$ është hapësira e caktuar e metrikës Minkowski. Indekset α dhe β lëvizin ndërmjet dy vlerave, 1 dhe 2, dhe ne kemi marrë $\xi^1 = \tau$ dhe $\xi^2 = \sigma$. Ashtu si vepruam për sipërfaqet hapësinore, ne përcaktojmë një metrike të detyruar në plan $\gamma_{\alpha\beta}$:

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial X}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X}{\partial \xi^\beta}$$

Në mënyrë matricore jepet:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} (\dot{X})^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & (X')^2 \end{bmatrix}$$

Me ndihmën e kësaj metrike ne mund të shkruajmë veprimin Nambu-Goto tek riparametrizimi në formë invariante.

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}, \quad \gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta})$$

Veprimi jo vetëm që riparametrizohet invariant. Në këtë formë, ai lehtësisht mund të përgjithësoj veprimin Nambu-Goto për të përshkruar dinamikën e objekteve që kanë dimensione më shumë se fjetet.

2.5 Ekuacioni i lëvizjes, kushtet kufitare, D-branet

Në këtë seksion në do të japim ekuacionet e lëvizjes që lindin nga ndryshimi i veprimit të fijeve. Duke vepruar kështu ne do të kemi një mundësi për të diskutuar kushtet e ndryshme kufitare që mund të shqiptohen për skajet e fijos së hapur. Kushtet kufitare Dirichlet do të interpretohen që lindin për shkak të ekzistencës së D-braneve.

Le të fillojmë duke shkruar veprimin Nambu-Goto si integral i dyfishtë i densitetit të një lagrangiani L:

$$S = \int_{t_1}^{t_f} d\tau L = \int_{t_1}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma L(\dot{X}^\mu, X'^\mu). \quad (2.12)$$

ku L jepet nga formula:

$$L(\dot{X}^\mu, X'^\mu) = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}. \quad (2.13)$$

Ne mund të fitojmë ekuacionet e lëvizjes për fijen relativiste duke vendosur variacionin e veprimit 2.12 të barabartë me zero.

Ndryshim është thjesht

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \frac{\partial L}{\partial X'^\mu} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right] \quad (2.14)$$

ne kemi vendosur

$$\delta \dot{X}^\mu = \delta \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} \quad (2.15)$$

njëlloj kemi vendosur edhe për $\delta X'^\mu$.

Këtë herë gjejmë:

$$P_\mu^\tau = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X'^2) \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \quad (2.16)$$

$$P_\mu^\sigma = \frac{\partial L}{\partial X'^\mu} = -\frac{T_0}{c} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X}^2) X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \quad (2.17)$$

Zëvendësojmë me σS ekuacionet e mësipërme dhe kemi:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (\delta X^\mu P_\mu^\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\delta X^\mu P_\mu^\sigma) - \delta X^\mu \left(\frac{\partial P_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial P_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \right] \quad (2.18)$$

Termi i parë në anën e djathtë, duke qenë një derivat i plotë në τ , do të kontribujë kushtet proporcionale me $\delta X^\mu(\tau_f, \sigma)$ dhe $\delta X^\mu(\tau_i, \sigma)$. Meqë ndryshimi i τ nënkupton rrjedhën e kohës, ne mund të imagjinojmë kushtet fillestare dhe përfundimtare të fijeve, dhe në kufizojmë veten për variacione për të cilat $\delta X^\mu(\tau_f, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_i, \sigma) = 0$.

Ne gjithmonë do të marrim variacione të tilla, kështu që ne mund t'i heqim këto terma nga ekuacioni më sipër. Variacioni pastaj bëhet:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_f} d\tau \left[\delta X^\mu P_\mu^\sigma \right]_0^{\sigma_1} - \int_{t_1}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu \left(\frac{\partial P_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial P_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right). \quad (2.19)$$

Meqë nga termi i dytë në anën e djathtë duhet të zhduken për të gjitha ndryshimet e lëvizjes, atëherë kemi:

$$\frac{\partial P_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial P_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0. \quad (2.20)$$

Ky është ekuacioni i lëvizjes për fijen relativiste, të hapur ose të mbyllur.

Një vështrim i shpejtë në përkufizimet 2.16 dhe 2.17 tregon se ky ekuacion është tepër i komplikuar. Celësi për zgjidhjen e tij do të qëndrojnë në ri-parametrizimin e invariancës së veprimit Nambu-Goto. Zgjedhja e një pametrizimi të thjeshtë do të thjeshtojë punën tonë jashtëzakonisht. Termi i parë në të djathtë të ekuacionit 2.19 ka të bëjë me fije me pika fikse. Kjo është, në fakt, një koleksion i termave që përfshin dy terma për çdo vlerë të indeksit μ .

Në mënyrë më eksplicite është:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau (\delta X^0(\tau, \sigma_1) P_0^\sigma(\tau, \sigma_1) - \delta X^0(\tau, 0) P_0^\sigma(\tau, 0) + \\ & \delta X^1(\tau, \sigma_1) P_1^\sigma(\tau, \sigma_1) - \delta X^1(\tau, 0) P_1^\sigma(\tau, 0) + \dots + \\ & \delta X^d(\tau, \sigma_1) P_d^\sigma(\tau, \sigma_1) - \delta X^d(\tau, 0) P_d^\sigma(\tau, 0)). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ne kemi nevojë për një gjendjeve të kufirit për çdo term në listën e mësipërme. Kjo është një total prej kushtet kufitare. Le të përqendrohemi në një term të vetëm, që ne e shënojmë μ dhe përzgjedhim një pikë fikse.

Le të shënojmë me σ_* σ -koordinatën e një pike fikse; σ_* mund të jetë e barabartë me zero, ose e barabartë me σ_1 . Përzgjedhja e një pike fikse do të thotë fiksimin e vlerës σ_* . Si më parë, ka dy kushte kufitare në një pikë fikse. I pari është një kusht kufiri Dirichlet, në të cilin pikat fikse të fijes mbeten fikse në të gjithë lëvizjen:

$$\text{Kushtet kufi Dirichlet: } \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(\tau, \sigma_*) = 0, \mu \neq 0$$

Meqë koha ndryshon dhe τ ndryshon, vlera $\mu = 0$ duhet të përjashtohet. Kushtet kufitare Dirichlet janë të mundshme vetëm për drejtimet hapësinore. Duke pasur parasysh se qëndrueshmëria në τ do të thotë qëndrueshmëri në kohë, ekuacioni 2.20 nënkupton se koordinata μ e zgjedhur e fijos në pika fikse është e fiksuar në kohë. Nga ana tjetër, në vend që të kërkomë që derivatet e τ të anulohen, ne thjesht mund të specifikojmë një vlerë konstante për $X^\mu(\tau, \sigma_*)$ nëse fija në pikat fikse është e caktuar, variacionet janë bashkësi të tilla që $X^\mu(\tau, \sigma_*) = 0$. Kjo garanton që termi përkatës në 2.19 të zhduket. Kushti i dytë kufi i mundshëm është që pikat fikse të jenë të lira:

$$\text{Kushti i pikave fikse të lira: } P_\mu^\sigma(\tau, \sigma_*) = 0.$$

Kjo gjendje rezulton dhe në konvergjencën e vijave paralele të termit përkatës në 2.21. Ky është quajtur një kushti i pikave fikse të lira, sepse ai nuk imponon asnjë kufizim, në ndryshim e $\delta X^\mu(\tau, \sigma_*)$ të koordinatave të fijos në pikat fikse. Gjendja e pikave fikse të lira duhet të aplikohet për $\mu = 0$.

$$P_0^\sigma(\tau, \sigma_1) = P_0^\sigma(\tau, 0) = 0.$$

Për fijen jorelativiste, gjendja e kufijve të lirë të pikave fikse nënkupton konvergjencën e vijave paralele të P , e cila imponon një kusht kufiri Neumann në koordinatën e fijos. Më në fund kuptojmë se kushti i pikave fikse të lira janë kushtet e një gjendjeje kufitare Neumann. Në mënyrë të ngjashme, kufiri Dirichlet do të shfaqet për të nënkuptuar konvergjencën e vijave paralele të P_μ^τ , në fijen me pika fikse.

Kushtet kufitare mund të vendosen në shumë mënyra të mundshme. Për çdo drejtim hapësinor, dhe në çdo pikë fikse, ne mund të zgjedhin ose një kusht Dirichlet ose një kufi të lirë të pikave fikse. Meqë fijet e mbyllura nuk kanë pika fikse, ato nuk kërkojnë kushtet kufitare.

Le të shohim rastin e kushteve kufitare Dirichlet. Është e qartë nga studimi i fijeve jorelativiste se kushtet kufitare Dirichlet lindin nëse pikat fikse të fijeve janë bashkangjitur me disa objekte fizike, p.sh. si figura 2.2. Në të majtë, fijos i është fiksuar në dy pika. Në të djathtë, fija është e lirë të rrëshqasë lart e poshtë

në pika fikse; pika fikse të fijeve janë të detyruara të qëndrojnë në vijat njëdimensionale dhe lëvizja horizontale e pikave fikse është e ndaluar.

Objektet në të cilat pikat fikse të fijos së hapur duhet të karakterizohen nga dimensionaliteti i tyre, me saktë, nga numri i dimensioneve hapësinore që ato kanë. Ato janë quajtur D-branes, ku gërma D është për Dirichlet. Objektet të cilat fiksojnë pikat fundore të pikave fikse të fijos në anën e majtë të figurës 2.2 janë zerodimensionale. Ato janë quajtur D_0 -branes.

Vijat të cilat kufizojnë pika fikse të fijos në anën e djathtë të figurës janë njëdimensionale. Ato janë quajtur D_1 -brane.

Një D_p -brane është një objekt me p dimensione hapësinore. Meqë pika fikse të fijos duhet të shtrihen në D_p -brane një sërë kushtesh Dirichlet kufitare duhen specifikuar. Një kuti D_2 -brane në një tredimensionale, për shembull, është përcaktuar me një kusht, $X^3 = 0$. Kjo do të thotë se D_2 -brane shtrihet në planin (X^1, X^2) . Kushtet Dirichlet vlenë edhe për koordinatën X^3 të fijos, e cila duhet të anulohet në pikat fikse.

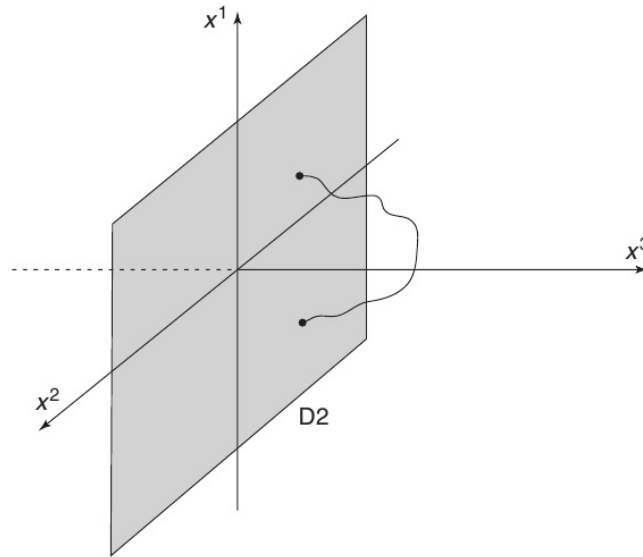


FIGURA 2.10: Një D_2 -brane shtrihet në planin (x_1, x_2) . Pikat përfundimtare e fijos së hapur mund të lëvizin lirshëm në plan, por duhet të mbeten të lidhura me të. Koordinata x_3 e pikave të fundit duhet të zhduket gjatë gjithë kohës. Ky është një kusht i kufirit Dirichlet për koordinatën X_3 .

Meqë lëvizja e pikve fikse të fijeve të hapur është e lirë në të gjitha drejtimet e braneve, koordinatat e fijos X^1 dhe X^2 plotësojnë kushtet e lira kufitare. Kur

pikat fikse të hapura të fijeve kanë kushte të lira kufitare përgjatë të gjitha drejtimeve hapësinore, ne ende kemi një D-Brane.

D-branet shtrihet në të gjithë hapësirën dhe pasi pikat fikse të hapura të fijos mund të jetë kudo në D-Brane, pikat fikse të hapura të fijos janë krejtësisht të lira. Për (kuantet) fijos relativiste konsistenca e kushteve kufitare Dirichlet lejon një për të zbuluar vetitë e D-braneve. D-branet janë objekte fizike që ekzistojnë në një Teorinë e Fijeve.

Kapitulli 3

Vrimat e zeza në Teorinë e Fijeve

Vrimat e zeza u shfaqën fillimisht si zgjidhje klasike e teorisë së përgjithshme të relativitetit. Duke qenë se Teoria e Fijeve është një teori unifikimi dhe e përgjithshme e fizikës, atëherë ajo duhet të jetë në gjendje të përshkruajë vrimat e zeza. Përpara se të përshkruajmë vrimat e zeza në Teorinë e Fijeve le të japim disa njohuri të përgjithshme të tyre.

3.1 Vrimat e zeza klasike

Vrima e zezë është një trup qiellor jashtëzakonisht i dendur (i ngjeshur), me një tërheqje gravitacionale aq të madhe dhe të fuqishme, saqë nuk lejon të largohet asgjë prej saj, madje as drita, nga "sipërfaqja" e saj, e emëruar "Horizonti i ngjarjeve". Vrima e zezë është përkufizuar edhe si një zonë e hapësirë-kohës ku largimi i gjithësisë rreth saj është i pamundur.

Qenësia e këtyre trupave qiellore është parashikuar nga teoria e përgjithshme e relativitetit dhe pranohet sot nga komuniteti shkencor. Ndërkaq, janë të pranishme disa vëzhgime të tërthorta të veprimtarisë astrofizike lidhur me vrimat të zeza, p.sh. në zonat qendrore të galaksive, si edhe lëshimet e rrezeve X nga rrezet X të dyfishta. Po ashtu supozohet që vrimat e zeza rrezatojnë energji për shkak të pasojave të mekanikës kuantike të njohura si "Rrezatimi Hokingian".

Vrima e zezë, pasi formohet nga një yll, ka një masë të paktën tre herë më të lartë se e Diellit, por për shkak të ecurive të ndryshme të humbjeve të masës të shkaktuara nga yjet në fundin e jetës së tyre ndodh që ylli fillestar të jetë së paku dhjetë herë më i ngjeshur se Dielli. Numrat e përmendur janë tregues, përse i përket hollësive të modeleve të përdorura për të parashikuar zhvillimin yjor dhe në veçanti nga përbërja kimike fillestare e mjegullnajave të gazta që i jep jetë yllit të lartpërmendur. Nuk është e papërfillshme mundësia që një

vrinë e zezë mund të ketë prejardhje joyjore, siç parashtrahet p.sh. për të ash-tuquajturat vrima të zeza fillestare".

Ato kanë një fushë gravitacionale shumë të madhe. Kjo për shkak se një yll normal qoftë ai xhuxh, gjigand apo supergjigand ka një fushë gravitacionale të jashtëzakonshme dhe kështu rrjedhimisht kjo forcë ekuilibrohet me forcat bërthamore që ndodhin në sipërfaqe të Diellit. Pra, gjatë periudhës së fun-dit të jetës së diellit ky "reaktor bërthamor" fillon të shuhet ngadalë-ngadalë dhe kështu forca ekuilibruese e gravitetit nuk ekziston ose është gjithmonë gjatë shuarjes. Në këtë mënyrë formohen yjet prej neutronesh (Grimca të pan-garkuara).

Pra, një vrimë e zezë për shkak të gravitetit shumë të madh që ka, nuk lejon që në të as të hyjnë e as të dalin rrezet e dritës, për shkak se ky yll është gjithmonë në zvogëlim dhe dendësia është e paimagjinueshme.

Kështu pra, vrimat të zeza quhen të zeza, sepse në to reflektojnë dritën, për shkak të dendësisë edhe gravitetit, të cilat janë forca që ne as nuk mund ti imagjinojmë. Ndryshe nga ç'mendojnë të gjithë, vrimat e zeza nuk absorbojnë planete edhe trupa hapësinorë, por thjesht kur një trup kalon afër saj drita e këtij trupi nuk mund të shihet nga ne.

3.1.1 Horizonti i ngjarjeve - Disku i jashtëm

Horizonti i një vrimë të zezë është kufiri në mes të pjesës së jashtme dhe pjesës së brendshme. Horizonti i vrimës së zezë është sjellja e përshkruar nga zba-timi i ekuacioneve të teorisë së përgjithshme të relativitetit të Ajnshtajnit. Nëse shikojmë nga larg një objekt që bie brenda vrimës së zezë, do të shohim se ob-jekti shkon afër dhe me afër, dhe drita bëhet e kuqe dhe më e kuqe, ose siç quhet ndryshe *red-shifted*. Dhe kjo është përpjekja më e afërt që ne kemi bërë për të testuar parashikimet e teorisë të horizontit.

3.1.2 Rrezja Schwarzschild

Nëse e kompresojmë Diellin në një rreze prej 2,5 km, do të krijohej një vrimë e zezë. Nga kompresimi i Tokës, rrezja do të ishte 0,9 cm. Kompresimi i një mali të madh do të kishte një rreze të barabartë me 1 nanometër. Kjo rreze është quajtur rreze Schwarzschild. Termi u emërua sipas matematikanit Karl Schwarzschild, i cili ishte i pari që zhvilloi formulën: $R_s = 2GM/c^2$, ku M është masa e trupit, G është konstantja universale e gravitetit, dhe c është shpejtësia e dritës. Ne mund të përdorim këtë formulë për llogaritjen e rrezes Schwarzschild

tek ndonjë objekt.

Dhe kështu, një objekt më i vogël se rrezja Schwarzschild njihet si një vrimë e zezë. Sipërfaqja e një vrime të zezë vepron si një horizont, një pikë në të cilën as vetë drita nuk mund të shpëtojë. Çfarë ndodh në të vërtetë me masën brenda rrezes Schwarzschild është një mister. Disa shkencëtarë besojnë se dendësia e masës do ta ndalonte vrimën e zezë që të kompresohet akoma më shumë, ndërsa disa të tjerë besojnë se vrima e zezë vazhdon të kompresonte përgjithmonë.

3.1.3 Rrezja Hawking

Rrezja Hawking tregon se kur njerëzit vdesin nga uria, ata dobësohen dhe pastaj vdesin, që do të thotë se kur një vrimë e zezë nuk ushqehet me (gaz/pluhur), ajo dobësohet duke humbur masën dhe pastaj shpërbëhet, por atë e bën në mënyrë shumë spektakolare në një hov të rrezatimit Hawking. Të paktën kjo është mënyra që ne kuptojmë sot, por teoria mund të jetë dhe e gabuar.

Kozmologu, astrofizikani dhe fizikani, Stephen Hawking në vitin 1974, tregoi se vrimat e zeza duhet të emetojnë rrezatim elektromagnetik me një spektër të trupit të tyre, ky proces është quajtur avullimi i vrimës së zezë. Ky proces teorikisht funksionon kështu: grimcat dhe antigrimcat prodhohen në mënyrë konstante dhe pastaj zhduken shumë shpejt. Normalisht, ne nuk mund t'i shohim kurrë grimcat dhe antigrimcat e kësaj dukurie, por e dimë ekzistencën e tyre nëpërmjet efektit Casimir. Megjithatë, nëse një palë e këtyre grimcave dhe antigrimcave virtuale dalin jashtë pranë ekzistencës së horizontit të vrimës së zezë, disa prej tyre mund të shpëtojnë dhe vrima e zezë në këtë mënyrë humbet masë. Kur këto grimca dalin larg nga horizonti i vrimës së zezë, atëherë referohen si rrezatimi i trupit të zi. Rezulton se sa më e vogël të jetë vrima e zezë, aq më shpejt do të humbas masën përkrah të rrezatimit Hawking. Në fund vrima e zezë shpërbëhet me një shpërthim të fortë të rrezatimit gama, sepse kur ajo zvogëlohet temperatura rritet në ekstrem.

Ka shumë mistere në lidhje me vrimat e zeza dhe rrezatimin Hawking, për shembull, avullimi i vrimës së zezë nëpërmjet rrezatimit Hawking do të thotë se informacioni i objektit ka humbur përgjithmonë. Shkaku kryesor i këtyre mistereve është se mekanika kuantike dhe relativiteti i përgjithshëm - dy teoritë

më të suksesshme në fizikë, nuk përputhen me njëra-tjetrën, dhe ne nuk kemi eksperimente apo vëzhgime që të na ndihmojnë për të zgjidhur këtë mospërputhje.

3.2 Vrimat e zeza Schwarzschild

Në koordinatat Schwarzschild, gjeometria Schwarzschild është sferike simetrike dhe statike. Në koordinatat Schwarzschild metrika (t, r, θ, ϕ) është dhënë nga ekuacioni:

$$ds^2 = -\left(1 - 2\frac{MG}{r}\right)dt^2 - \left(1 - 2\frac{MG}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

ku

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

.

Koordinata t quhet koha Schwarzschild dhe kjo paraqet kohën e regjistruar nga një orë standarde në pushim në hapësirat e pafundme; $2GM$ është e njohur si rrezja Schwarzschild dhe shënohet r_H , G është konstantja e Newton-it dhe koordinata r quhet rreze Schwarzschild. Metrika Schwarzschild varet vetëm nga një masë M totale dhe kjo reduktohet në një metrikë Minkowski si $M \rightarrow 0$. Kjo metrikë është stacionare në kuptimin që komponentët e saj janë të pavarur nga koordinata Schwarzschild në kohën t , në mënyrë që $\partial/\partial t$ është një vektor Killing. Ky vektor Killing është koha jashtë horizontit, zero në horizont, dhe hapësirë brenda horizont-it.

M ka interpretimin e një mase duke pasur parasysh limitin e dobët në fushë, që është asimptotik kur $r \rightarrow \infty$. Potenciali Njutonian ϕ në këto koordinata të palëvizshme mund të lexohet nga komponenti tt i metrikës

$$G_{tt} \sim -(1 + 2\phi).$$

Si rezultat, në rastin e vrimës së zezë Schwarzschild,

$$\phi = -\frac{MG}{r}$$

në mënyrë bëhet më e qartë se parametri M është masa e vrimës së zezë.

Metrika katër-dimensionale Schwarzschild mund të përgjithësohet për të D-dimensione, ku ajo merr formën:

$$ds^2 = - \left[1 - \left(\frac{r_H}{r} \right)^{D-3} \right] dt^2 + \left[1 - \left(\frac{r_H}{r} \right)^{D-3} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2,$$

me

$$r_H^{D-3} = \frac{16\pi M G_D}{(D-2)\Omega_{D-2}}.$$

Këtu Ω_n është vëllimi i n-sferës njësi, përkatësisht

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{n+1/2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Për r të mëdha, ajo përsëri përcakton potencialin e Njutonit dhe për këtë arsye masën e vrimës së zezë M.

3.2.1 Zgjidhja Schwarzschild në koordinata Kruskal-Szekeres

Së fundi ne mund të sjellim metrikën e vrimës së zezë në formën:

$$ds^2 = \frac{4r_h^3}{r} e^{r_h/r} (-d\nu^2 + du^2) + r^2 d\Omega_2^2,$$

ku

$$u = \left(\frac{r}{r_H} - 1 \right)^{-1} e^{r/2r_H} \cosh\left(\frac{t}{2r_H}\right),$$

$$\nu = \left(\frac{r}{r_H} - 1 \right)^{-1} e^{r/2r_H} \sinh\left(\frac{t}{2r_H}\right).$$

Zonat e ndryshme të hapësirë-kohës të përcaktuara me këtë metrikë janë të përfaqësuara në diagramin Kruskal të treguar në figurën 3.2.

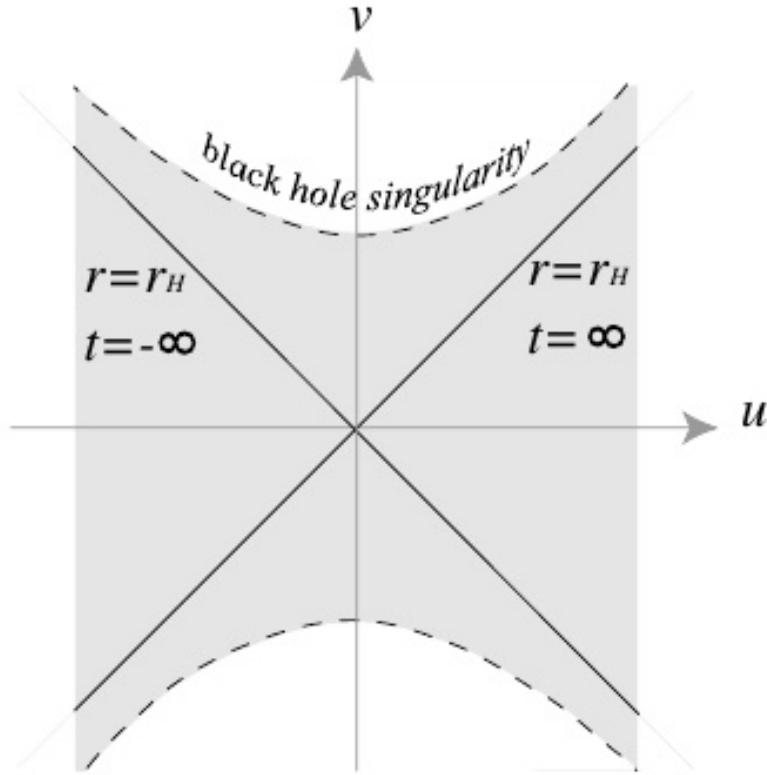


FIGURA 3.1: Vrima e zezë në koordinatat Schwarzschild Kruskal-Szekeres.

Në këto koordinata në veçanti kur $r = 0$ vija korrespondon me hiperbolë $v^2 - u^2 = 1$. Kështu, hapësirë-koha përkufizohet për $-\infty < r < +\infty$ dhe $v^2 < u^2 + 1$

Gjeometria Schwarzschild në koordinata Kruskal-Szekeres tregon shumë zona hapësirë-kohë se ato që përfaqësohen nga koordinatat origjinale Schwarzschild, të cilat janë të mira vetëm për $r > r_H$. Zonat tjera janë jofizike në kuptimin që një vrimë të zezë fizike që formohet nga kolapsi do të ketë vetëm për këtë veçanti të ardhmen (me $u > 0$) dhe jo të paktën një (me $u < 0$). Ky i fundit sillet si një vrimë e zezë në kohë të ndryshuar dhe ndonjëherë është quajtur vrimë e bardhë.

Ekuacioni $ds = 0$ është kënaqur nga vijat me veti $du = \pm dv$ (dhe fikson pozicionin në sferë).

Për $|u| < |v|$,

$$t = r_H \log \frac{u + \nu}{u - \nu}$$

dhe kështu pasqyrimet e horizontit në $t = \pm\infty$. Ajo merr një sasi të pafund të kohës Schwarzschild për të arritur në horizont, i cili reflekton faktin se horizonti është i kuq pafundësisht, i zhvendosur për një vëzhgues asimptotik. Nga figura mund të konkludojmë se rrezet e dritës të emetuara nga një burim që gjendet në brendësi të vrimës së zezë, që do të thotë brenda horizontit, nuk dalin në zonën jashtë vrimës së zezë. Kjo është arsyeja pse sipërfaqja $r = r_H$ quhet horizont i ngjarjeve. Në përgjithësi, horizonte të tilla të ngjarjeve janë të pavlefshme, që do të thotë se vektorët normalë n_μ në këto sipërfaqe kënaqin ekuacionin

$$n^2 = 0.$$

Në rastin në fjalë, horizonti është një sferë e rreze r_H .

Në përgjithësi horizonti i ngjarjeve jepet nga formula:

$$A = 4\pi r_H^2 = 16\pi(MG)^2$$

.

3.3 Vrimat e zeza Reissner-Nordström

Përgjithësimi i vrimës së zezë Schwarzschild me një ngarkesë, por pa moment këndore, quhet vrimë e zezë Reissner-Nordström. Në katër dimensionet metrika e një vrimë të zezë Reissner-Nordström shkruhet në formën:

$$ds^2 = -\Delta dt^2 + \Delta^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2,$$

ku

$$\Delta = 1 - \frac{2MG}{r} + \frac{Q^2 G}{r^2}$$

Varësia e funksionit $\Delta(r)$ e cila ilustron këto singularitete është treguar në figurën ??.

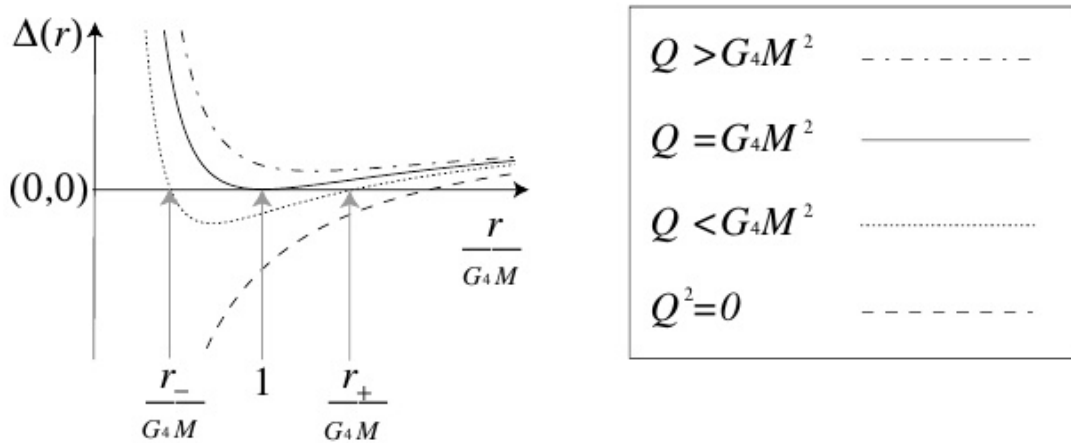


FIGURA 3.2: Funkzioni $\Delta(r)$ për vrimat e zeza Reissner-Nordström

3.4 Vrimat e zeza ekstremale Reissner-Nordström për

$$D = 4$$

Vrimat e zeza Reissner-Nordstrom kanë përgjithësime të drejtpërdrejta të tjera për dimensionet e hapësirë-kohës. Siç është theksuar në hyrje, një vrimë e zezë ekstremale Reissner-Nordstrom në $D = 5$ është me interes në lidhje me derivimet mikroskopike të entropisë së vrimës së zezë. Metrika e saj mund të shkruhet në formë të ngjashme me ekuacionet e mëparshme:

$$ds^2 = - \left[\left(1 - \frac{r_0}{r} \right)^2 \right]^2 dt^2 + \left[\left(1 - \frac{r_0}{r} \right)^2 \right]^{-2} + r^2 d\Omega_3^2,$$

ku $r_0 = MG$.

Duke përdorur këtë shprehje, ajo është e lehtë për të parë se horizonti në $r = 0$ ka rreze r_0 , dhe për këtë arsye dhe sipërfaqja e saj është:

$$A = \Omega_3 r_0^3 = 2\pi 2r_0^3.$$

Masa dhe ngarkesa për këtë vrimë të zezë janë:

$$M = \frac{Q}{\sqrt{G_5}} = \frac{3\pi r_0^2}{4G_5}.$$

3.5 Disa koncepte bazë nga mekanika statistike

Studimi i termodinamikës së fijeve do të bëjnë përdorimin e dy llojet e asambleve: mikrokanonike dhe kanonike. Ansambli mikrokanonik përbëhet nga një koleksion i kopjeve të një sistemi A dhe çdo gjendje A ka një energjisë fikse E. Në ansamblin kanonike ne shqyrytojmë sistemin e A si një kontakt termik me një rezervuar në një temperaturë T. Ky ansambël përmban një kopje të sistemit A, së bashku me të rezervuarit; një kopje për çdo gjendje të lejuar të sistemit të kombinuar. Në ansamblin kanonike energjia e sistemit A ndryshon ndërmet e anëtarëve të ansamblit.

Le të fillojmë me ansamblin mikrokanonik. Sistemi A është i menduar të jetë në izolim dhe të ka një energji të fiksuar. Le të jetë $\Omega(E)$ numri i gjendjeve të mundshme të sistemit A dhe ka energji E. Entropia S e sistemit është përcaktuar në varësi të numrit të gjendjeve si

$$S(E) = k \ln \Omega(E),$$

ku k është konstantja e Boltzmann-it.

Temperatura T e sistemit është e përkufizuar si derivati i entropisë në lidhje me energjinë:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}.$$

Ajo ndonjëherë është e lehtë për të punuar me ansamblin kanonik. Imagjinojmë një sistem A, i cili ka një vëllim fiks dhe është në kontakt termik me një rezervuar në temperaturë të sistemit T.

Supozojmë se ne e dimë gjendjet kuantike α të sistemit dhe energjitë e tyre përkatëse E_α . Atëherë funksioni ndarje Z për sistemin A është përkufizuar si:

$$Z = \sum_{\alpha} e^{-\beta E_\alpha}, \quad \beta = \frac{1}{kT}.$$

Funksioni ndarje është i dobishëm, sepse ai mund të përdoret për të llogaritur sasi interesante. Për shembull, në qoftë se sistemi A është i njohur të ketë T temperaturën, pastaj, duke përdorur Z, ne mund të llogaritim probabilitetin që A është në një gjendje të caktuar kuantike:

$$p = \frac{1}{\beta} \frac{\partial Z}{\partial V}.$$

3.6 Temperatura Hagedorn

Tani ne jemi duke marrë parasysh fijet e hapura që nuk kanë moment hapësinor. Për shembull, në qoftë se pikat fikse të fijeve të hapura në një D0-brane të dhënë, kur momenti është zero, fija ka nivelet e energjisë që janë dhënë vetëm nga masa tjetër e gjendjeve të saj kuantike. Masa-katror e një gjendje të caktuar mund të shprehet në termat e operatorit numrit $N^\perp$:

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} (N^\perp - 1) \cong \frac{N^\perp}{\alpha'}$$

në përafrimin për $N^\perp$ të madhe. Energjia $E = M$ ka të bëjë me numrin e operatorëve nga barazia e thjeshtë

$$\sqrt{N^\perp} = \sqrt{\alpha'} E.$$

Në ansamblin mikrokanonik, numri i gjendjeve $\Omega(E)$ është i barabartë $P_{24}(N^\perp)$, sepse ne kemi 24 drejtime tërthore dritë-kon, dhe si pasojë 24 lëkundje për çdo numër mode.

Si rezultat,

$$S(E) = k \ln p_{24}(N^\perp).$$

Për energji të madhe, $N^\perp$ është gjithashtu e madhe. Ne përcaktojmë:

$$S(E) = k 2\pi \sqrt{\frac{N^\perp 26}{2}} = k 4\pi \sqrt{N^\perp}$$

Duke e bërë përdorimin e lidhur me numrin e energjisë më lartë ne përcaktojmë:

$$S = k 4\pi \sqrt{\alpha'} E$$

Kjo është lidhja entropia-energji në energji të lart. Një entropi proporcionale me energjinë është e pazakontë për shkak se ajo çon në një temperaturë konstante:

$$\frac{1}{kT} = \frac{1}{k} \frac{\partial S}{\partial E} = 4\pi \sqrt{\alpha'}$$

Kjo temperaturë quhet temperatura Hagedorn dhe shënohet T_H :

$$\frac{1}{\beta_H} = kT_H \frac{1}{4\pi\sqrt{\alpha'}}$$

Këtu KT_H është energjia termike lidhur me temperaturën Hagedorn. Në përafrimin e mësipërm të energjisë ne jemi duke punuar me të, në mënyrë arbitrare mund të rritim energjinë e fijeve, dhe temperatura e tyre do të mbetet fikse në temperaturën Hagedorn.

Lidhja entropi energji gjithashtu është e vërtetë për fijet e mbyllura pa moment hapësinor.

3.7 Termodinamika e vrimave të zeza

Vrimat e zezë kanë temperaturë dhe entropi, por këto gjendje janë të vështira për t'u kuptuar në nivelin themelor të mekanikës statistikore, ku ai duhet të rrjedhin nga një numërim i gradëve të lirisë. Teoria e Fijes ka pasur disa suksese mbresëlënëse në kuptimin e entropisë së vrimave të zeza. Ne shqyrtojmë karakteristikat themelore të vrimave të zeza dhe përdorim Teorinë e Fijes për të diskutuar entropinë e vrimave të zeza katër-dimensionale Schwarzschild.

Një thërmije me masë m , ka energji mc^2 dhe energji gravitacionale $-mMG/R$,

$$mc^2 - \frac{mMG}{R} = 0 \Rightarrow R \cong \frac{MG}{c^2}.$$

Rrezja e saktë llogaritet në relativitetin e përgjithshëm dhe përgjigja është

$$R = \frac{2MG}{c^2}.$$

Rrezja Schwarzschild e Diellit është rreth tre kilometra, rrezja Schwarzschild e Tokës është rreth një centimetër dhe rrezja Schwarzschild e një asteroidi miliardë ton është e rendit prej 10^{-15} m. Është e mundur që të përdorin ligjet Njutonit e gravitetit për të vlerësuar në fushën gravitacionale në horizont:

$$|\vec{g}| = \frac{MG}{R^2} = \frac{c^4}{4MG}.$$

Kjo fushë gravitacionale bëhet e vogël për vrima të zeza shumë masive. Një objekt masiv është një vrimë e zezë në qoftë se ajo është e rrethuar nga një sferë

që ka rrezen e saj Schwarzschild.

Nëse zbatojmë ligjin e dytë të termodinamikës, atëherë ekzistenca e vrimave të zeza të çon në disa përfundime të habitshme. Supozojmë se një sasi të caktuar të gazit të nxehtë bie në një vrimë të zezë, në këtë mënyrë vrima e zezë tashmë ka një masë pak më të madhe. Meqë entropia e përgjithshme e sistemit të përbërë nga gazi dhe vrima e zezë nuk mund të ulet, vrima e zezë duhet të ketë fituar pak entropi nga gazi. Në këtë mënyrë besojmë se vrimat e zeza kanë entropi. Një sistem ka entropi kur ka shumë gjendje mikroskopike të sistemit që janë në përputhje me vetitë e tij makroskopike.

Vrimat e zeza lëshojnë rrezatim termik me një temperaturë të përcatuar: një temperaturë Hawking $\bar{T}_H$ që është proporcionale me fushën gravitacionale në horizont dhe rrjedhimisht, në përpjesëtim të zhdrejtë me masën e vrimës së zezë (nuk duhet ngatërruar me temperaturën Hagedorn). Rrezatimi që del nga vrima e zezë nga rajoni pranë horizont kontrollohet nga graviteti.

Temperatura Hawking e një vrimë të zezë me masë M rezulton:

$$K\bar{T}_H = \frac{1}{8\pi M},$$

kështu që, duke futur në ekuacion faktorët e H , C dhe G gjejmë

$$K\bar{T}_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi MG}$$

Ky ekuacion na lejon për të llogaritur entropinë e Bekenstein S_B të vrimës së zezë. Duke përdorur $E = mc^2$ për energjinë e vrimave të zeza dhe ligjin e parë të termodinamikës $dE = \bar{T}_H dS_B$, kemi:

$$dE = c^2 dM = \bar{T}_H dS_B = \frac{\hbar c^3}{8\pi MG} \frac{1}{k} dS_B.$$

Me ca rregullime të vogla

$$\frac{1}{k} dS_B = \frac{4\pi G}{\hbar c} dM^2.$$

Integrojmë këtë ekuacion dhe duke supozuar se entropia e një vrimë të zezë me masë zero është zero, ne gjejmë

$$\frac{S_B}{k} = \frac{4\pi G}{\hbar c} M^2.$$

Entropia e vrimës së zezë është proporcionale me katrorin e masës së saj. Me $A = 4\pi R^2$ dhe R të dhënë më sipër, marrin ekuacionin

$$\frac{S_B}{k} = \frac{1}{4} \frac{c^3}{\hbar G} A = \frac{A}{l_p^2},$$

ku l_p është gjatësia e Planck-ut.

Ana e djathtë në këtë ekuacion ka një interpretim të thjeshtë: Entropia Bekenstein S_B është një e katërta e zonës së horizontit shprehur në njësi të gjatësisë së Planck-ut në katror. Duke pasur parasysh se l_p^2 është një zonë shumë e vogël, entropia e çdo madhësie astrofizike e vrimës së zezë është jashtëzakonisht e madhe. Teoria e Fijeve siguron gradët e lirisë për vrimat e zeza, por ato nuk lidhen direkt në zonën e horizontit.

Në Teorinë e Fijes, ne përpiqemi të bëjmë një vrimë të zezë stacionare Schwarzschild në një fijeje me një shkallë të lartë të eksitimit, por moment zero. Në ansamblin mikrokanonik, një gjendje e fijeve me energji E ka një entropi të caktuar. Kjo është e vërtetë si për fijet e hapura dhe për fijet e mbyllura. Identifikimi $E = M$ dhe duke punuar tanii e tutje me $\hbar = c = 1$, ne kemi

$$\frac{S_{str}}{k} = 4\pi\sqrt{\alpha'} M,$$

ku kemi shtuar indeksin e S_{str} për t'iu referuar entropisë së fijeve. Ky rezultat duhet të krahasohet me entropinë e vrimës së zezë

$$\frac{S_B}{k} = 4\pi G M^2.$$

Mosmarrëveshja duket të jetë e qartë: entropia e një vrimë të zezë është në përpjestim të drejtë me masën katror, ndërsa entropia e një fije është në përpjestim të drejtë me masën. Ne së shpejti do të tregojmë se mosmarrëveshja e dukshme është ajo që pritet. Kur ato të jenë kuptuar si duhet, këto ekuacione shfaqin një nivel të habitshëm të marrëveshjes. Varësia lineare e entropisë së fijeve në lidhje me masën M të fijeve nuk është e habitshme. Entropia është një sasi e gjerë, si dhe për një fije masa M është përafërsisht proporcionale me gjatësinë e saj L . Ndërkohë, entropia e vrimës së zezë shfaq një veçori të habitshme: nuk është proporcionale me vëllimin e mbyllur nga horizonti i ngjarjes, por me sipërfaqen e mbyllur nga horizonti. Ky dështim i gjerësisë është një tipar i

fizikës gravitacionale.

Para shqyrtimit të lidhjes midis ekuacioneve të mësipërme, le t'i japim një vlerësim të entropisë së fijeve. Për këtë, ne shqyrtojmë një fije me masë M dhe vlerësojnë se gjatësia e saj L që do të jepet nga:

$$M \sim T_0 L \sim \frac{1}{\alpha'} L,$$

ku T është tensioni i fijos. Ne tani imagjinojmë një fije të ndërtuar nga bashkimi i disa pjesëve të fijeve, secila prej të cilave është me gjatësi $l_s = \sqrt{\alpha'}$. Çdo pjesë fijeje mund të ketë pika në një nga drejtimet e mundshme n . Numri n mund të jetë i barabartë me numrin e dimensioneve hapësinore, por nga argumentet tona që janë të përafërta, kështu që nuk do të specifikojmë. Meqë numri i pjesëve të fijos është $L/\sqrt{\alpha'}$, numri i mënyrave Ω që ne mund të ndërtojmë këtë vfi je është afërsisht

$$\Omega \sim n^{L/\sqrt{\alpha'}} \sim n^{M\sqrt{\alpha'}} \sim e^{M\sqrt{\alpha'} \ln n}$$

Entropia e fijos është marrë duke marrë logaritmin e Ω

$$\frac{S_{str}}{k} \sim M\sqrt{\alpha'} \sim ML_s.$$

Ky rezultat është në përputhje me shprehjen e dhënë me sipër.

Ekuacionet e mësipërme të entropisë pajtohen për shkak se entropia e vrimave të zeza S_B ishte llogaritur në një regjim ku bashkëveprimet janë të nevojshme, ndërsa entropia e fijos S_{str} ishte llogaritur për fijet e lira. Ne nuk duhet të kemi pritur marrëveshje, përveç nëse për disa arsye bashkëveprimet nuk kanë ndikuar në llogaritjen e entropisë së fijeve. Bashkëveprimet janë të nevojshme në llogaritjen e entropisë së vrimave të zeza për shkak të konstantes së Njutonit G .

Në të vërtetë,

$$G \sim g^2 \alpha' \sim g^2 l_s^2.$$

Entropi e vrimave të zeza dhe rrezja e tyre janë dhënë nga

$$\frac{S_B}{k} \sim GM^2 \sim g^2 l_s^2 M^2$$

$$R \sim GM \sim g^2 l_s^2 M.$$

Konsiderojnë tani një vrimë të madhe të zezë me entropinë Bekenstein S_0 , në masë M_0 , dhe rreze $R_0 \gg l_s$. Fiksojmë edhe bashkimin e fijeve për disa vlera të fundme g_0 . Atëherë kemi

$$\frac{S_0}{k} \sim g_0^2 l_s^2 M^2$$

$$R_0 \sim g_0^2 l_s^2 M.$$

Le të jetë g_* , R_* dhe M_* vlerat finale të bashkimit të fijeve, rrezja e vrimës së zezë, dhe masa e vrimës së zezë, respektivisht. Qëndrueshmëria e entropisë dhe formula për rrezen jepet nga:

$$\frac{S_0}{K} \sim g_0^2 l_s^2 M^2 = g_*^2 l_s^2 M_*^2$$

$$R_0 \sim g_*^2 l_s^2 M_*.$$

Ne nuk presim që këto rezultate të jenë të vërteta kur vrima e zezë bëhet më e vogël se gjatësia e fijos dhe le të shënojmë $R_* = l_s$ si rreze minimale në ekuacionin më sipër, atëherë kemi:

$$g_*^2 l_s^2 M_* \rightarrow M_* \sim \frac{1}{g_*^2 l_s}.$$

Kthehemi në shprehjen për entropisë S_0 dhe gjejmë

$$\frac{S_0}{k} \sim \frac{1}{g_*^2}.$$

Meqë vrimat e zeza ne i keni lidhur me një masë M_* , ne shqyrtojmë një fije me masë M_* . Entropia është dhënë nga:

$$\frac{S_{str}}{k} \sim M_* l_s \sim \left(\frac{1}{g_*^2 l_s} \right) l_s \sim \frac{1}{g_*^2},$$

Kapitulli 4

Bashkëveprimet e fijeve në sipërfaqet e Riemann-it

Bashkëveprimet dhe forcat me të cilat grimcat bashkëveprojnë e bëjnë botën interesante. Në këtë kapitull ne do të shikojmë bashkëveprimet e fijeve në sipërfaqet e Riemann-it. World-sheet-et e bashkëveprimit të fijeve të hapura janë të njohura si sipërfaqe Riemann-i, dhe proceset e bashkëveprimit janë parë për të ndërtuar hapësirat module të këtyre sipërfaqeve. Pasqyrimi konformal është përdorur për të siguruar prezantime kanonike për bashkëveprimet e koneve të dritës të world-sheet-it.

4.1 Disa koncepte bazë

Bashkëveprimet lindin në mënyrë shumë elegante në Teorinë e Fijes, sepse ato janë përshkruar nga proceset në të cilat fijet bashkohen dhe ndahen. Në këto procese, world-sheet-et e fijeve kombinohen për të formuar një world-sheet të vetme, e cila përfaqëson një bashkëveprim.

Sipërfaqet e Riemann-it janë disa nga rastet më interesante të sipërfaqeve dy-dimensionale. Ato janë sipërfaqet ku të dy koordinatat formojnë një variabël kompleks. Sipërfaqet e Riemann-it janë ruajtur nga pasqyrimet konformale, kështu që ato nuk kanë asnjë koncept "apriori" të distancës. Sipërfaqet jo-equivalente të Riemannit mund të dallohen nga parametrat e quajtur moduli. Gjetja e një mënyre për të ndërtuar të gjitha sipërfaqet e Riemann-it me modulin e tyre është një problem matematikor shumë i vështirë.

Studimi ynë i bashkëveprimit të fijeve do të japë prova shumë të forta për një deklaratë të rëndësishme: world-sheet-et e bashkëveprimeve të fijeve japin pikërisht këtë ndërtim.

World-sheet-et e fijeve mund të përdoren për të llogaritur amplitudën kuantike mekanike për shpërndarjen. Analiza jonë e sipërfaqeve të Riemann-it do të motivojë amplitudën për shpërndarjen e katër tachyons-eve, e famshme amplitudë e Veneziano-s.

Fillimisht do të shohim në një kujtesë të shkurtër të asaj se çfarë janë sipërfaqet e Riemannit dhe pasqyrimet Konformale.

4.1.1 Sipërfaqet e Riemann-it

Ka disa përkufizime matematikore të një sipërfaqeje Riemann-i, por ne duhet të dimë se një sipërfaqe Riemann-i s'është gjë tjetër veçse një version i deformuar i planit kompleks, ku lokalisht çdo pikë duket si planin kompleks, por globalisht topologjia mund të jetë shumë e ndryshme.

Për shembull, kur kemi dy pasqyrime, pasqyrimin $z = x + iy$, pra planin kompleks, dhe pasqyrimin $\omega = \sqrt{z}$ ne kemi marrë sipërfaqe topologjike mjaft të ndryshme. Sipërfaqja e Riemann-it, të cilën do ta shohim që është plani që kufizon gjysmën e sipërme të planit, të përfaqësuara nga $\bar{H}$. Është e qartë se gjysma e sipërme e planit është $H = \{x + iy/y \geq 0\}$.

Kufiri i saj vetëm përfshin pika në pafundësi të boshtit Y . $\bar{H} = H \cup \infty$. Kjo pikë në pafundësi vjen sepse kur kemi pasqyruar planin në gjysmën e sipërme të sferës së Riemann-it, çdo pikë në sipërfaqen e planit merr plotësisht në një pikë të veçantë në sferën përveç polin verior të sferës që merr për të gjitha pikat në pafundësi. Kjo është arsyeja pse ne vendosim një pikë të vetme në pafundësi për të simbolizuar të kaluarën e pafundme apo të ardhmen e pafundme. E kaluara infinite nuk është tjetër vecse $-\infty$ në mënyrë të njëjtë dhe e ardhmja e pafund është $+\infty$.

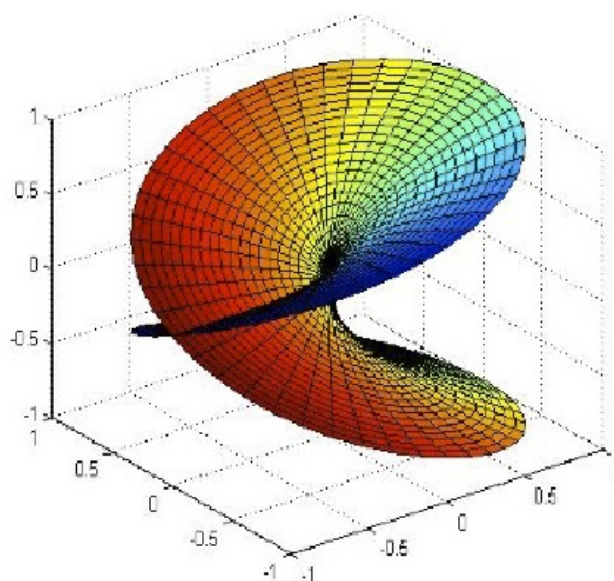


FIGURA 4.1: Grafiku i funksionit $f(z) = \omega = \sqrt{z}$

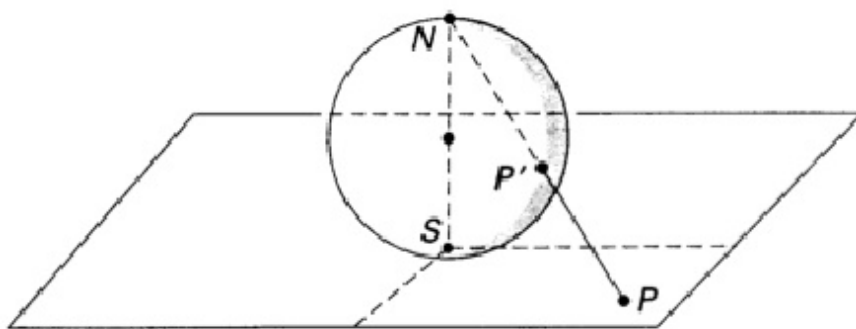
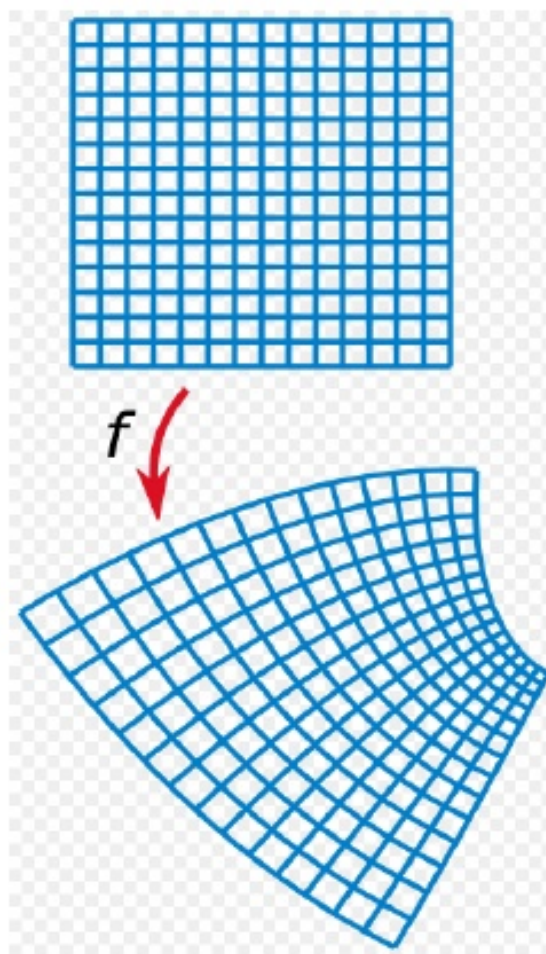


FIGURA 4.2: Grafiku që tregon se kur pasqyrohet plani kompleks te sfera e Riemann-it vendoset një pikë, N

4.1.2 Pasqyrimet konformale

Pasqyrimet konformale janë pasqyrime midis sipërfaqeve të Riemann-it që ruajnë këndet. Le të shikojmë në figurën më poshtë për të kuptuar domethënien e tyre. Pasqyrimet konformale kanë një veti shumë të rëndësishme, ato gjithmonë vërtetojnë ekuacionin e Laplasit $\nabla^2 f = 0$. Pra, kur kemi ndonjë funksion, i cili është përcaktuar nga një potencial ose nga një kurbë, ai mund të transformohet nga një pasqyrim konformal.



Ne do të shohim më vonë se ky aspekt i pasqyrimeve konformale e bën më të lehtë për ne që të kuptojmë bashkëveprimet e fijeve.

4.1.3 Teorema e pasqyrimeve të Riemann-it

Përkufizimi i plotë matematikor i teoremës së pasqyrimeve të Riemann-it thotë se, në qoftë se U është një nënbashkësi joboshe e thjeshtë e lidhur e planit kompleksit $\mathbb{C}$ (ndoshta nuk është e gjithë $\mathbb{C}$), atëherë ekziston një pasqyrim biholomorfik f nga U mbi një disk njësi të hapur.

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Kushti që U të jetë i thjeshtë i lidhur, do të thotë se U nuk përmban asnjë vrimë. Një deklaratë e fortë do të jetë që ne mund të pasqyrojmë çdo sipërfaqe të mbyllur mbi çdo sipërfaqe tjetër të mbyllur përmes diskut njësi.

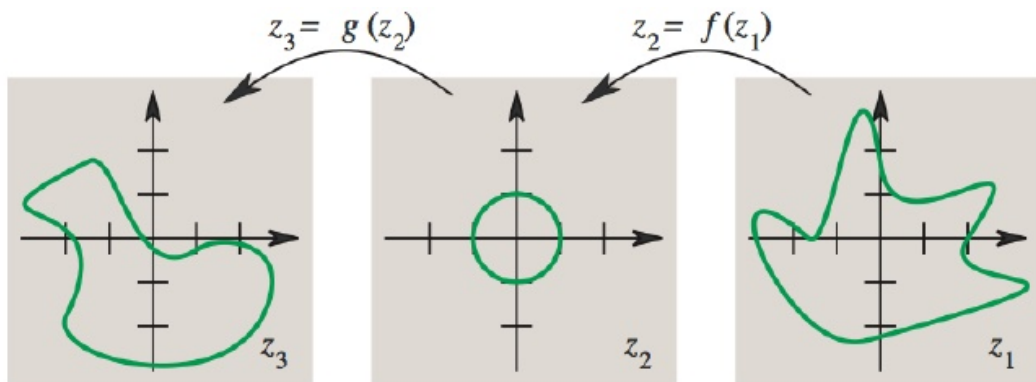


FIGURA 4.3: Çdo hapësirë të mbyllur mund të pasqyrohet plotësisht në diskun njësi e cila nga ana mund të pasqyrohet plotësisht në çdo sipërfaqe të tjetër të mbyllur.

4.1.4 Transformimi Schwarz-Christofel

Së bashku me teoremën e pasqyrit të Riemann-it, ne gjithashtu na duhet dhe pasqyrimi Schwarz-Christofel mes poligoneve të mbyllura dhe gjysmës së sipërme të planit. Në fakt, ne edhe mund të lëvizim një (ose më shumë) kulme të poligonit deri në pikën e pafundme dhe në këtë mënyrë pasqyrojmë boshtin e x -eve mbi çdo kurbë lineare.

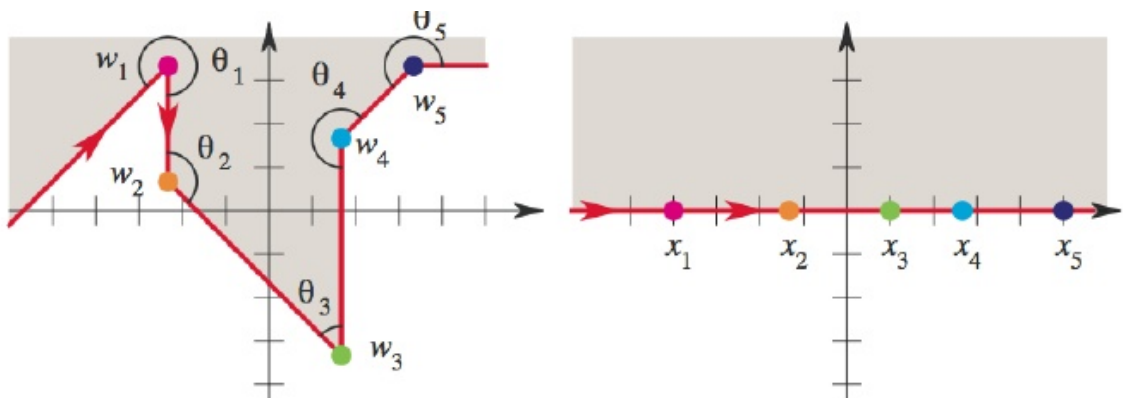


FIGURA 4.4: Ne mund të pasqyrojmë çdo poligon kompleks në gjysmën e sipërme të planit

Në figurën 4.4 kemi pasqyruar kulmet e poligonit në pikat $w_1, w_2, w_3, \dots$ në pikat $x_1, x_2, x_3, \dots$ në $\bar{H}$.

Formula që i jep këtë pasqyrim është

$$F'(z) = A(z - x_1)^{(\theta_1/\pi)-1}(z - x_2)^{(\theta_2/\pi)-1}(z - x_3)^{(\theta_3/\pi)-1} \dots$$

Distanca midis pikave përcaktohet nga faktori A në ekuacion. Shpesh është faktori shkallë që ne kemi nevojë për të gjetur ose për të vendosur një faktor të veçantë dhe pastaj të gjejmë pikat. Në rastin tonë ne do të fiksojmë disa nga pikat dhe do të lëmë një pikë si variabël, e cila më pas do të karakterizojë diagramet tona.

Tani që kemi të gjithë sfondin e matematikës, para së gjithash të shikojmë se si për të interpretuar bashkëveprimet e fijeve në një me një shpresë kuptimplotë. Pastaj ne do të lëvizin për llogaritjen aktuale të nevojshme.

4.2 Bashkëveprimet dhe vëzhgimet

Para se të fillojmë studimin e bashkëveprimeve të fijeve dhe sipërfaqeve të Riemann-it, le të përgatitim terrenin për konceptin e bashkëveprimit. Qëllimi është që të ndërtojmë një figurë për bashkëveprimet e fijeve dhe të përcaktojmë një numër që i jep probabilitetin për të cilat ngjarjet do të ndodhin. Në këtë mënyrë duhet të ndërtojmë diagramin e fijeve dhe llogaritim pasqyrimet konformale të cilat japin një përfaqësim kanonik të atij diagrami dhe, duke përdorur teorinë konformale të fushës, të llogaritim amplitudën nga përfaqësimi kanonik.

4.2.1 Bashkëveprimet e fijeve dhe world-sheet-et globale

Fijet mund të bashkëveprojnë në një numër tepër të kufizuar mënyrash. Dy bashkëveprime të mundshme të fijeve të hapura janë si më poshtë: një fije e hapur mund të ndahet në dy fije të hapura, dhe dy fijet e hapura mund të bashkohen për të formuar një fije të vetme të hapur.

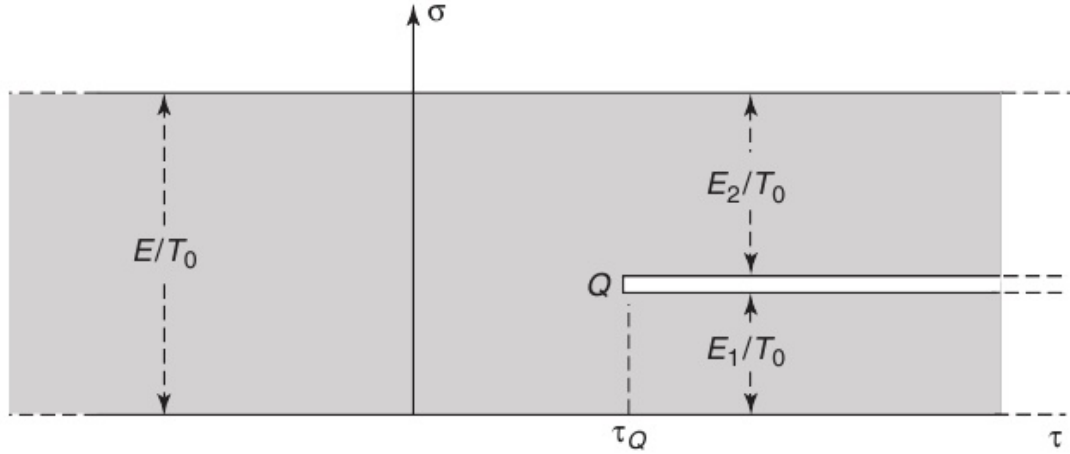


FIGURA 4.5: Bashkëveprimi i fijeve të hapura, në të cilin një fije me energji E ndahet në fijet me energji E_1 dhe E_2 . Bashkëveprimi ndodh në $\tau = \tau_Q$.

Diagramet e fijeve janë përfaqësitë e bashkëveprimit të tyre. Fokusi i diagramit të fijeve është world-sheet-i (τ, σ) .

Bashkëveprimet duhet të analizohen duke përdorur një matës specifik, pasi zgjedhja e matësit ndikon në përshkrimin e world-sheet-it. Në këtë matës

$$X^0(\tau, \sigma) = c\tau$$

dhe fijet janë parametrizuar duke përdorur energjinë në E :

$$\sigma \in [0, E/T_0] = [0, 2\pi\alpha' E]$$

ku T_0 është tensioni i fijeve. Meqë energjia duhet të ruhet dhe energjia e një fijeje përcakton gjatësinë e saj σ , bashkëveprimet duhet të ruajnë gjatësinë totale σ .

Janë gjithashtu të mundshme procese disi më të komplikuar, p.sh. dy fije, me energjitë E_1 dhe E_2 , mund të bashkohen për të formuar një fijeje të vetme të hapur me energji $E_1 + E_2$.

Po të mendojmë se kemi dy fije të hapura (fijet një dhe dy), të cilat bashkëveprojnë për të formuar një fije të vetme të hapur (fijen tre). Ne kemi çdo fije është parametrizuar nga

$$\sigma \in \left[0, \frac{2\pi}{\beta}\right] = [2\pi\alpha' p^+]$$

ku p^+ është momenti i kryer nga fija.

Tani ne mund të përfaqësojmë ndarjen e fijos një në fijet dy dhe tre duke përdorur një diagram të vetëm në planin (τ, σ) , siç tregohet në figurën 4.6. Bashkëveprimi duket si gjerësi e një shiriti të pafund me një prerje. Figura është përshkruar nga dy parametra: gjerësia e fijos një dhe gjerësia e fijos dy ose fijos tre.

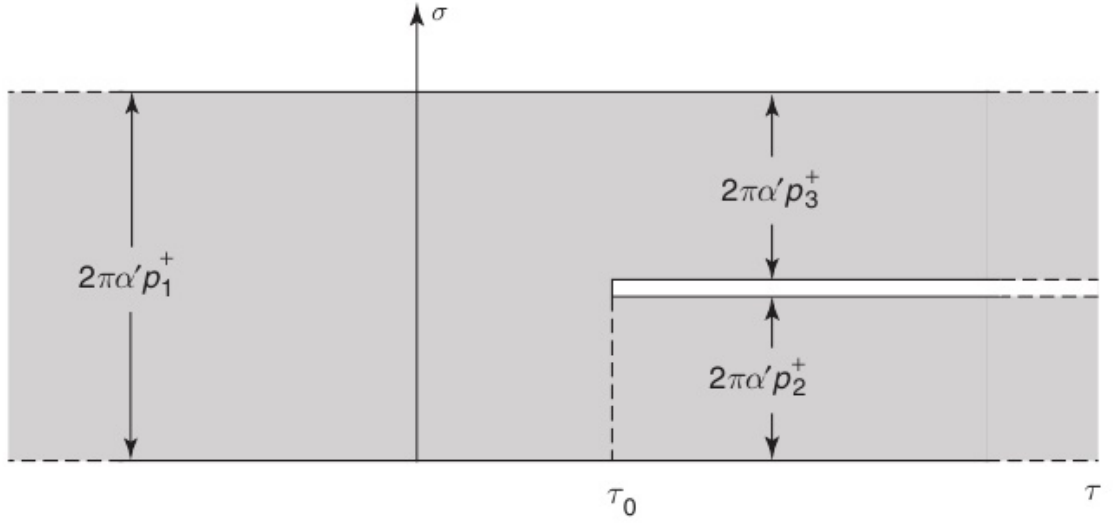


FIGURA 4.6: World-sheet për një bashkëveprim ndarës në matësin e dritë-kon-eve.

4.2.2 World-sheet-i si sipërfaqe Riemanni

Sipërfaqet e Riemann-it janë sipërfaqe dydimensionale. Përkufizimi i një sipërfaqeje Riemann-i kërkon konceptin e një funksioni analitik. Një funksion $f(z)$ me variabla komplekse z është analitik në z_0 , nëse derivati i f ekziston në disa zona të z_0 .

Sipërfaqja më e thjeshtë e Riemanni-it është plani kompleks $\mathbb{C}$. $z \equiv x + iy$ përdoret për të përshkruar pikën në këtë plan.

Nëse marrim $\omega = \tau + i\sigma$, atëherë ne kemi world-sheet-in si një sipërfaqe Riemann-i. World-sheet-i më i thjeshtë është ai i një fijeje të lirë të hapur. Siç tregohet në figurën 4.7, world-sheet-i për një fije me moment dritë-kon p^+ është

një rrip $0 \leq \text{Im}(\omega) \leq 2\pi\alpha'p^+$.

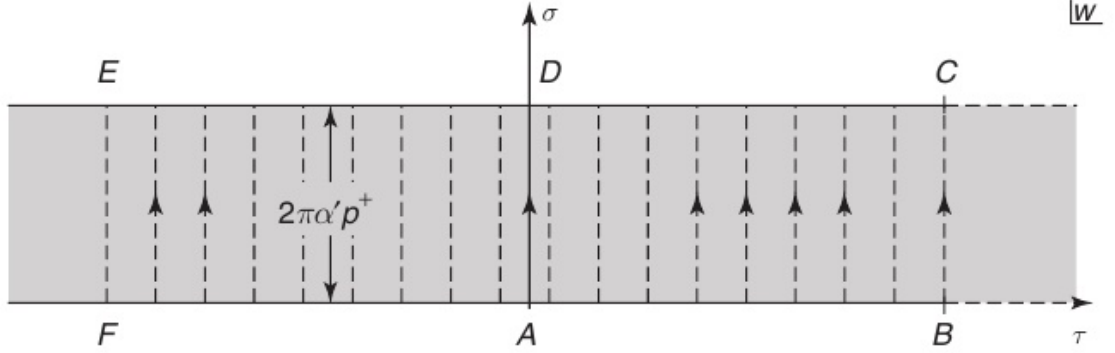


FIGURA 4.7: Një fije e hapur që lëviz

Fijet janë segmentet vertikale e konstante τ . Meqë pasqyrimet konformale nuk do të ndryshojë fizikën, kjo është një ide e mirë për të njohur nga afër veten me fotot që janë konformale ekuivalente me rripin.

Le të shohim se çfarë ndodh me një rrip, kur ne e pasqyrojmë duke përdorur funksionin eksponencial

$$z = \exp \frac{\omega}{2\alpha'p^+}.$$

Rezultati i këtij pasqyrimi është treguar në pjesën e majtë të figurës 4.8.

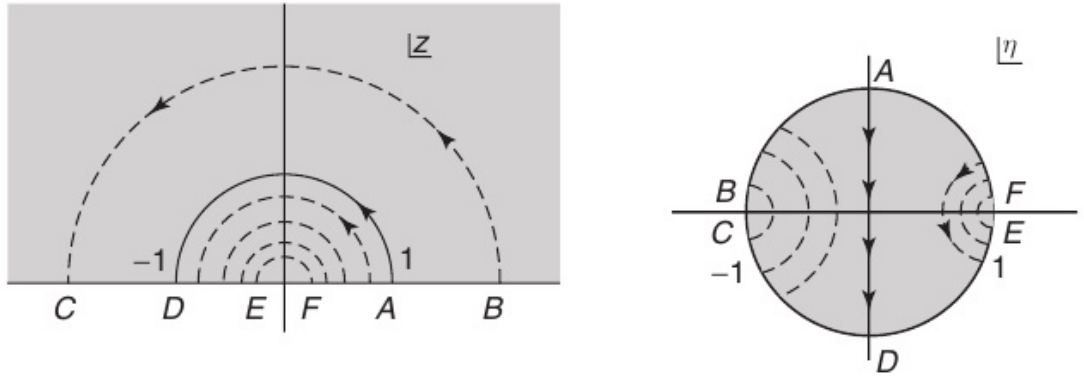


FIGURA 4.8: Majtas: shiriti i brendshëm është pasqyruar në H ë nëpërmjet pasqyrimit eksponencial. Djathtas: $\bar{H}$ është pasqyruar mbi diskun njësi nëpërmjet një transformimi linear fraksional.

Siç tregohet në figurë, kufiri $\sigma = 0$ pasqyrohet në gjysmën pozitive të drejtzës reale, ndërsa kufiri $2\pi\alpha'p^+$ pasqyrohet në gjysmën negative të drejtzës reale.

Këndi ndërmjet kufijve ka ndryshuar. Rripi ka qenë plotësisht në $\bar{H}$, dhe fijet duket si gjysmërrathë të përqëndruar në $z = 0$. Fija në $\tau = 0$ është gjysmërrathë njësi.

Një tjetër prezantim i dobishmëm për sipërfaqen e Riemann-it të një fijeje të lirë e të hapur është pasqyrimi $\bar{H}$ mbi diskun njësi në planin η nëpërmjet transformimit

$$\eta = \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Ky plan është ilustruar në anën e djathtë të figurën 4.8

Këtë herë $z = 0$ është pasqyruar në $\eta = 1$ dhe $z = \infty$ është pasqyruar në $\eta = -1$. Dy kufijtë janë gjysëmrrathë njësi BAF dhe CDE. Kur shiriti është pasqyruar në një zonë të kufizuar, fija e plotë është pasqyruar në dy pika në kufirin e zonës së kufizuar. Këto pika janë kufij dhe nuk arrihen për asnjë fije në një kohë të caktuar, kështu që topologjikisht këto pika duhet të hiqen nga kufiri i zonës së mbyllur. Ato janë quajtur "shpime".

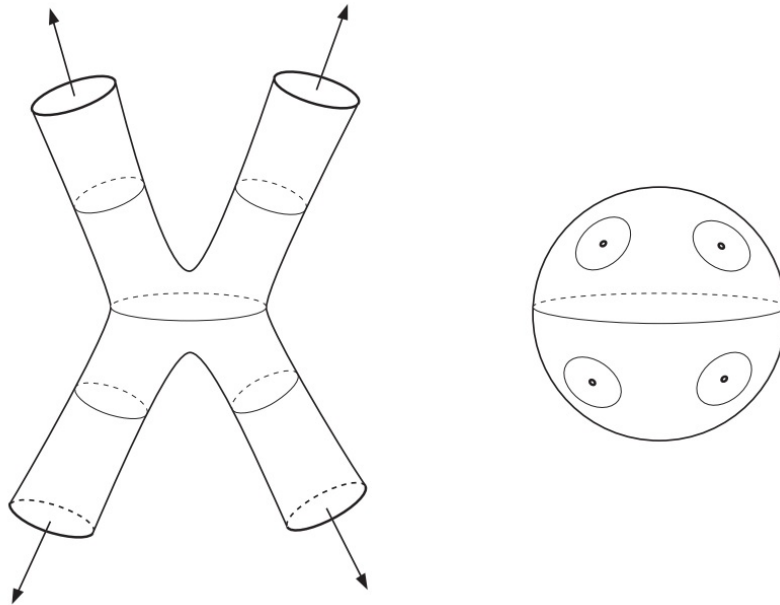


FIGURA 4.9: Pasqyrimi konformale i fijeve në një sferë Riemanni me shpime

Pasqyrimet konformale kanë treguar se një rrip i caktuar është konformalisht ekuivalente me një disk, i shpërndarë dy herë në kufi. Një fije jo e mbyllur

mund të përfaqësohet nga diagrami i fijos në figurën 4.7, me kuptimin që skajet e sipërme dhe të poshtme të shiritit të brendshëm janë identifikuar. Më saktësisht, identifikojmë pikat në të dy skajet që kanë të njëjtën vlerë të pjesës reale $R(\tau)$. Ky identifikimin rezulton në një cilindër të caktuar me perimetër $2\pi\alpha'p^+$.

4.2.3 Pasqyrimi Schwarz-Christoffel

Pas intuitës së zhvilluar më lart, kjo sipërfaqe duhet të jetë konformalish ekuivalente me një disk me tre shpime në kufi. Në fakt, teorema e pasqyrimeve të Riemann-it garanton se ky bashkëveprim i world-sheet-ve mund të pasqyrhet konformalisht në $\bar{H}$, në të cilin kufijtë e fijeve pasqyrohen në drejtzën reale.

Pasqyrimet në lidhje me poligonet dhe $\bar{H}$ quhen pasqyrime Schwarz-Christoffel.

Supozojmë se ne kemi një poligonin në w -plan kompleks. Supozojmë se kemi një poligon që ka n brinjë dhe rrjedhimisht n kulme, të shënuara me $P_1, P_2, \dots, P_n$. Pasqyrimi Schwarz-Christoffel $\omega(z)$ merr $z \in \bar{H}$ në poligon. Situata është ilustruar në figurën e mëposhtme. Ne zgjedhim kufirin e poligonit të orientuar në mënyrë të tillë që pjesa e brendshme e poligonit të shtrihet në të majtë të kufirit të orientuar. Pasqyrimi merr drejtzën reale në planin z , të orientuar në drejtim të vlerave në rritje, në kufirin e orientuar të poligonit.

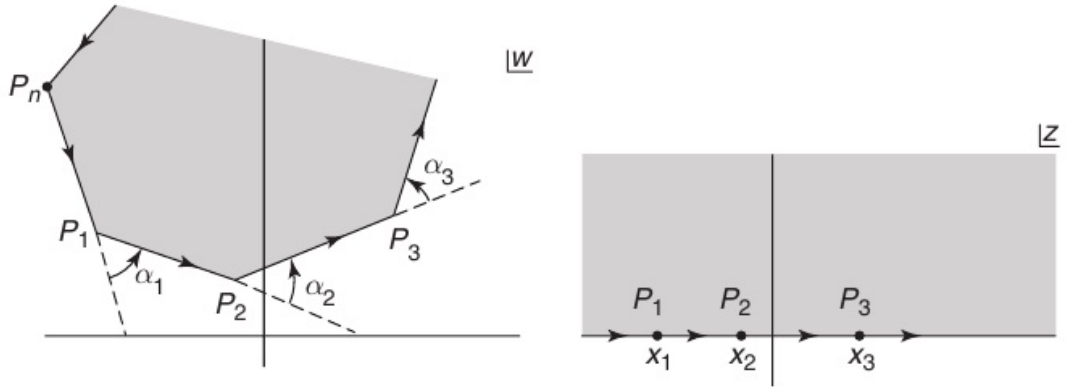


FIGURA 4.10: Pasqyrimi Schwarz-Christoffel $\omega(z)$ merr $\bar{H}$ në poligonin.

Poligoni ka kënde α_i në brinjët P_i . Nga përkufizimi, ne marrim këndet në intervalin $[-\pi, \pi]$

$$-\pi \leq \alpha_i \leq \pi$$

Këndet π dhe $-\pi$ japin lloje krejtësisht të ndryshme të këndeve. Ne pretendojnë se ekuacioni diferencial për pasqyrimin $\omega(z)$ është

$$\frac{d\omega}{dz} = A(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}} (z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}} \dots (z - x_{n-1})^{\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}}$$

Meqë një poligonin është i mbyllur, shuma e këndeve duhet të jetë 2π .

4.3 Bashkëveprimet e fijeve

Le të konsiderojmë procesin ku dy fijet e hapura bashkohen për të formuar një fije të ndërmjetme, e cila më pas ndahet në dy fije të hapura. Fijet hyrëse janë fijet tre dhe katër, dhe fijet dalëse janë fijet një dhe dy. Diagrami i fijeve është treguar në figurë 4.11.

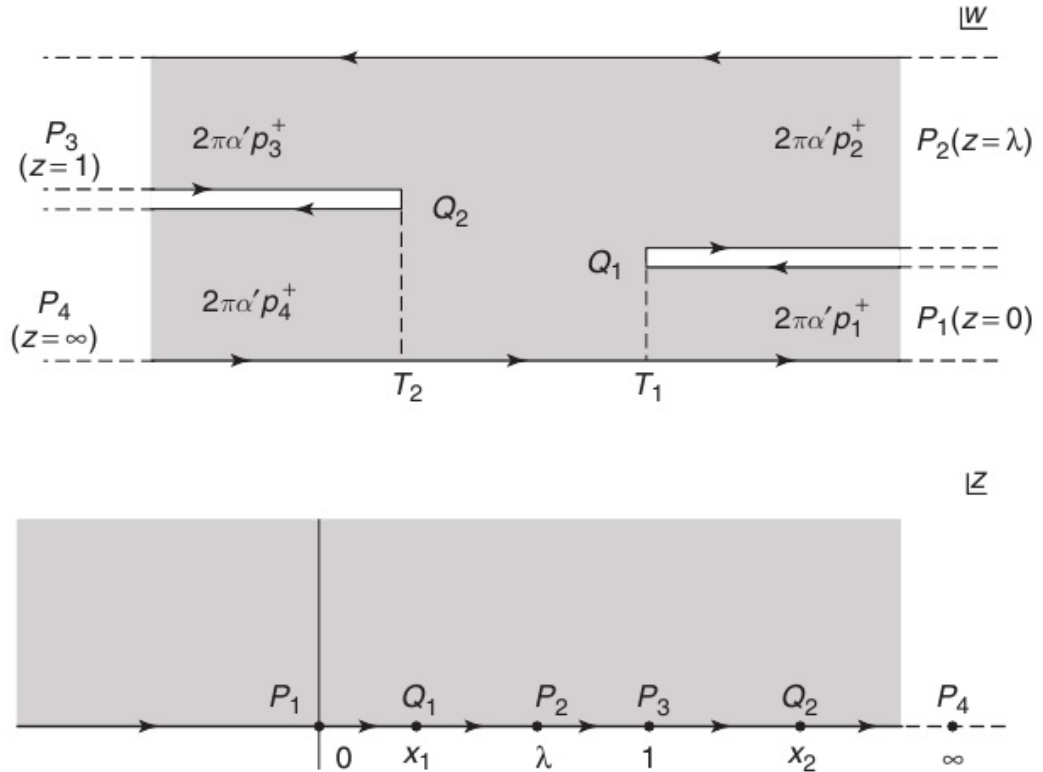


FIGURA 4.11: Një dritë-kon ne diagram tregon fijet tre dhe katër bashkuar për të formuar një fije të ndërmjetme të cilat pastaj ndahen në fijet një dhe dy.

Vëmë re se pika e bashkëveprimit Q_1 ndodh në $\tau = T_1$ dhe Q_2 ndodh në $\tau = T_2$. Intervali kohor midis bashkëveprimit është

$$T = T_1 - T_2$$

Në diagramin e treguar në figurë $T > 0$. Por vendosjen e të gjitha bashkëveprimeve të mundshme gjithashtu përfshin rastet kur $T < 0$. Gama e plotë e T për këtë bashkëveprim është

$$-\infty < T < \infty.$$

Ne tani përdorim një pasqyrim Schwarz-Christoffel për të marrë këtë diagram në $\bar{H}$. Pikat e veçanta në kufirin e diagramit të fijos janë $(P_1Q_1P_2P_3Q_2P_4)$.

Në $\bar{H}$ duhet të plotësohet kushti:

$$0 < x_1 < \lambda, \quad 1 < x_2 < \infty.$$

Në pikat P_i kënde janë $+\pi$, dhe në pikat e bashkëveprimit Q_i kënde janë $-\pi$. Prandaj, ne kemi

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dz} &= \frac{1}{z}(z-x_1)\frac{1}{z-\lambda}\frac{1}{z-1}(z-x_2) \\ &= A \left[\frac{1}{z} \frac{x_1x_2}{\lambda} + \frac{1}{z-\lambda} \frac{(\lambda-x_1)(x_2-\lambda)}{\lambda(1-\lambda)} - \frac{1}{z-1} \frac{(1-x_1)(x_2-1)}{1-\lambda} \right] \end{aligned}$$

Ne gjithashtu dimë një mënyrë për të shkruar pasqyrimet konformale direkt,

$$\omega(z) = -2\alpha' p_1^+ \ln z - 2\alpha' p_2^+ \ln(z-\lambda) + 2\alpha' p_3^+ \ln(z-1).$$

Duke marrë derivatin,

$$\omega(z) = -2\alpha' p_1^+ \frac{1}{z} - 2\alpha' p_2^+ \frac{1}{z-\lambda} + 2\alpha' p_3^+ \frac{1}{z-1}$$

Ne mund të krahasojmë dy ekuacionet diferenciale për të marrë tri ekuacionet që lidhen parametrat e momentit të diagramit të fijeve.

Vëmë re se T_1 është pjesa reale e ω kur $z = x_1$ dhe T_2 është pjesa reale e ω kur $z = x_2$

Ne tani mund të vlerësojnë $T = T_1 - T_2$:

$$\frac{1}{2\alpha'} T = p_1^+ \ln \frac{x_2}{x_1} + p_2^+ \ln \frac{x_2-\lambda}{\lambda-x_1} + p_3^+ \ln \frac{1-x_1}{x_2-1}.$$

Ky ekuacion i fundit, së bashku me ato të mëpsippërme, fikson vlerat e parametrave të panjohur.

Ne kemi treguar në këtë mënyrë se diagramet dritë-kon prodhojnë të gjitha sipërfaqet përkatëse të Riemann-it, që janë të gjitha $\bar{H}$ me katër shpime kufitare. Diagramat e fijeve prodhojnë hapësirën $\mathbb{N}_4$. Sic kemi përmendur më parë, λ ndryshon në mënyrë monotone me T , kështu që çdo vlerë e λ në interval $(0, 1)$ merret vetëm një herë.

Më sipër është një ilustrim i një rezultati të rëndësishëm dhe të përgjithshëm në Teorinë e Tijes. Për bashkëveprime arbitrare të fijeve mbetet një rezultat analog. Mbajtja llojin topological e diagramit të fijeve fikse, pasi parametrat e diagramin janë të ndryshme mbi fijet natyrore, set i plotë i sipërfaqeve inequivalent Riemann e llojit të caktuar topological është prodhuar. Bashkëveprimet e fijeve gjenerojnë hapësirat moduli të sipërfaqeve të Riemann-it.

4.3.1 Amplituda e Veneziano-s

Amplituda Veneziano është shkruar nga Gabriele Veneziano-ja në vitet 1960. Po të marrim $\bar{H}$ shpuar në x_1, x, x_3 dhe x_4 me $x_1 < x < x_3 < x_4$, siç tregohet në figurën 4.12. Këto janë pikat ku duhet të futen katër tachyons (tachyon është një grimcë hipotetike që udhëton më shpejt se drita). Në x_1 tachyon-i ka moment p_1 , në x tachyon-i ka moment p_2 dhe në x_3 dhe x_4 tachyon-et kanë momente p_3 dhe p_4 , respektivisht.

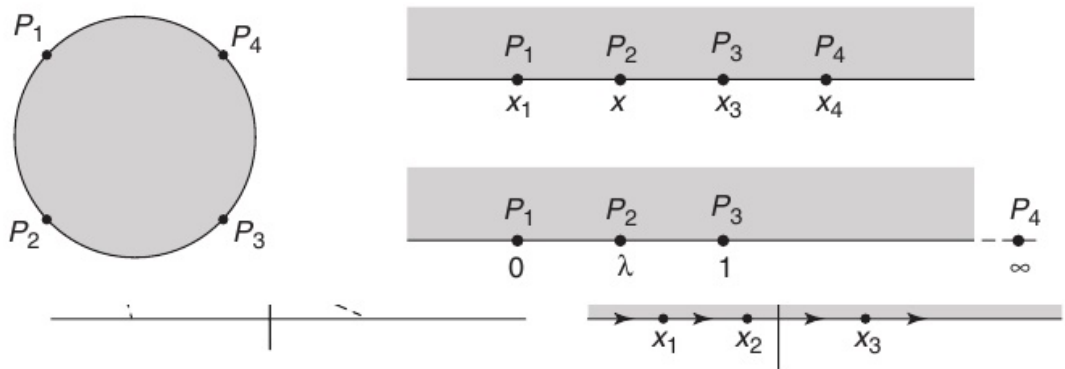


FIGURA 4.12: Një dritë-kon ne diagram tregon fijet tre dhe katër bashkuar për të formuar një fije të ndërmjetme të cilat pastaj ndahen në fijet një dhe dy.

Shkrimi i amplitudës së shpërndarjes $A(p_1, p_2, p_3, p_4)$ si integral

$$A(p_1, p_2, p_3, p_4) = g_0^2 \int d\mu,$$

madhësia $d\mu$ duhet të përfshijë dx , sepse do të integrojmë sipas x . Ajo gjithashtu duhet të varet nga momentet e tachyon-eve dhe në pozicionet e shpimeve kufitare. Momentet gjithashtu plotësojnë kushtet:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0 \text{ dhe } p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = \frac{1}{\alpha'}$$

Zgjedhja duhet të jetë invariante, d.m.th integrali i $d\mu$ duhet të japë të njëjtën përgjigje për çdo zgjedhje tjetër. Një transformim i përgjithshëm i këtij lloji është:

$$z \rightarrow \frac{ax + b}{cx + d}, ab - bc \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Ne thjeshtojmë madhësinë $d\mu$ duke marrë $x_1 = 0$, $x = \lambda$, $x_3 = 1$ dhe $x_4 = \infty$. Edhe pse i morëm të tilla, nuk ka asnjë problem sepse zgjedhjen e morëm invariante.

Duke përdorur $x_4 \gg x_1, x, x_2$, mund të thjeshtojmë:

$$d\mu = d\lambda |x_4^2| |\lambda|^{2\alpha' p_2 p_1} |1 - \lambda|^{2\alpha' p_2 p_3} |x_4|^{2\alpha' p_4 (p_1 + p_2 + p_3)}$$

Meqë nga $\lambda \in (0, 1)$ dhe x_4 shton deri në zero, ne përcaktojmë se amplituda Veneziano është dhënë nga

$$A(p_1, p_2, p_3, p_4) = g_0^2 \int_0^1 d\lambda \lambda^{2\alpha' p_2 p_1} (1 - \lambda)^{2\alpha' p_2 p_3}$$

Si hap të parë, ne shprehim produktet e momentit në varësi të invarienteve Lorencit s dhe t . Nëse fijet një dhe dy do të bashkohen për të formuar një fije të ndërmjetme, fija do të ketë momentin $p_1 + p_2$. Nga ana tjetër, në qoftë se fijet dy dhe tre do të bashkohen për të formuar një fije të ndërmjetme, do të mbajnë momentin $p_2 + p_3$.

Kështu invariantet përkatëse janë:

$$S = -(p_1 + p_2)^2 \quad t = -(p_3 + p_4)^2$$

Duke përdorur këtë lidhje, amplituda Veneziano është shkruar si

$$A(p_1, p_2, p_3, p_4) = g_0^2 \int_0^1 d\lambda \lambda^{\alpha(s)-1} (1 - \lambda)^{-\alpha(t)-1},$$

ku $\alpha(s) = \alpha + 1$.

Ky integral mund të shprehet në termat e funksioneve gama

$$A(p_1, p_2, p_3, p_4) = g_0^2 \frac{\gamma(-\alpha(s))\gamma(-\alpha(t))}{\gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))}$$

Kapitulli 5

Manifoldet Calabi-Yau

5.1 Manifoldet

Hapësira në Teorinë e Fijeve është përshkruar shpesh me anë të një objekti matematikor e quajtur manifold. Manifoldet janë objekte shumë të rëndësishme, nga pikëpamja matematikore dhe fizike, jo vetëm në Teorinë e Fijeve. Këto manifolde, janë sipërfaqet ose hapësirat, por ndryshe nga sipërfaqet e dydimensionale që kemi njohur, këto sipërfaqe mund të jetë në çdo dimension.

Një manifold është një hapësirë topologjike që lokalisht ngjan me hapësirën Euklidiane pranë çdo pike. Më saktësisht, secila pikë e një manifoldi n -dimensional ka një fqinjësi që është homeomorlike me hapësirën Euklidiane me dimension n . Manifoldet njëdimensionale përfshijnë drejtëzat dhe rrathët, ndërsa manifoldet dy-dimensionale quhen gjithashtu sipërfaqe. Shembujt të tjerë përfshijnë planin, sferën dhe torusin, të cilët të gjithë mund të ndodhen në hapësirën reale tre-dimensionale.

Koncepti i një manifoldi është qendror për shumë pjesë të gjeometrisë dhe fizikës moderne matematikore, sepse lejon që strukturat e komplikuar të përshkruhen dhe të kuptohen në kuptimin e vetive më të thjeshta topologjike lokale të hapësirës Euklidiane. Manifoldet lindin natyrshëm si zgjidhje e bashkësive të sistemeve të ekuacioneve, si dhe nga grafikët e funksioneve.

Manifoldet mund të pajisen dhe me struktura shtesë. Një klasë e rëndësishme e manifoldeve është klasa e manifoldeve të diferencueshme; kjo strukturë e diferencueshme mundëson llogaritjen në manifolde. Një metrikë Riemanniane në një manifold mundëson matjen e distancave dhe këndeve. Modelet Lorentziane katërdimensionale modelojnë hapësirë-kohën në relativitetin e përgjithshëm.

5.1.1 Manifoldet komplekse

Manifold kompleks me dimension n quhet një hapësirë topologjike Hausdorff M e pajisur me një mbulim të hapur $U_i, i \in I$ dhe pasqyrimin $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ të cilat japin një homeomorfizëm të U_i në një nënbashkësi të hapur të $\mathbb{C}^n$ dhe pasqyrimet e kalimit

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

janë holomorfe.

5.2 Gjeometria Kahler

Gjeometria Kähler studion manifoldet komplekse me një metrikë hermitiane të përshtatur ndaj një strukture komplekse. Në matematikë dhe sidomos në gjeometrinë e diferencueshme, një manifold Kähler është një manifold me tri struktura të ndërsjella: një strukturë komplekse, një strukturë Riemaniene dhe një strukturë simplektike. Koncepti u studiua fillimisht nga Jan Arnoldus Schouten-i dhe David van Dantzig-u në vitin 1930, dhe më pas u paraqit nga Erich Kähler-i në vitin 1933. Terminologjia është caktuar nga André Weil-i.

5.3 Manifoldet Calabi-Yau

Manifoldet Calabi-Yau janë manifolde kompakte, manifolde komplekse Kähler dhe që e kanë zero klasën e parë Chern (mbi $\mathbb{R}$). Në shumicën e rasteve, ne supozojmë se ato kanë grupe themelore të fundme. Me supozimin e Calabi (1957) të provuar nga Yau (1977, 1979), në çdo manifold Calabi-Yau ekziston një metrikë Kähler me lakim Ricci zero në pikën zero.

Aktualisht, hulumtimi mbi manifoldet Calabi-Yau është një fokus qendror të matematikës dhe fizikës matematikore.

5.4 Klasat Chern dhe Tensori Ricci

Klasat Chern dhe lakimi Ricci kanë lindur nga përpjekjet e bëra nga gjeometër për të përgjithësuar sipërfaqet te Riemann-it me një dimension në shumë, dhe

pastaj për të karakterizuar matematikisht dallimet midis këtyre përgjithësimeve.

Klasat Chern karakterizojnë dallimet ndërmet dy manifoldeve. Në qoftë se dy manifolde kanë klasa të ndryshme Chern, ato nuk mund të jenë të njëjta, por jo gjithmonë kjo është vërtetë: Dy manifolde mund të kenë të njëjtat klasa Chern dhe përsëri të jenë të ndryshme.

Numri i klasave Chern që një manifoldi të caktuar varet nga numri i dimensioneve. Një manifold me dy dimensione komplekse, për shembull, ka klasën e parë dhe të dytë Chern. Për manifoldet me interes të madh në Teorinë e Fijëve ata me tri dimensione komplekse (ose gjashtë ato reale) dhe kanë tre klasa Chern.

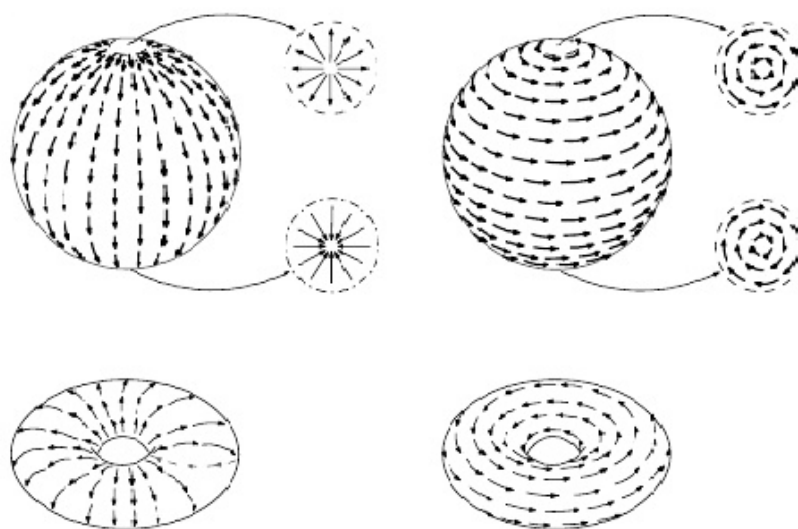


FIGURA 5.1: Klasa e parë Chern ka të bëjë me vendet ku rrjedha e një fushe vektoriale krejtësisht të mbyllef.



FIGURA 5.2: Përcaktimi i klasës së parë Chern të një objekti.

Për të përcaktuar lakimin Ricci, marrim një pikë në manifold dhe përcaktojmë një tagente në këtë pikë, pastaj të gjithë planet dydimensional tagjent që përmbajnë atë vektor, secili prej këtyre planeve ka një lakim sektorial bashkangjitur me të. Një manifold Ricci do të thotë se për çdo vektor lakimi mesatar sektorial i të gjithë planeve tangjent që përmban atë vektor është i barabartë me zero, edhe pse lakimi seksional i një planit individual nuk mund të jetë zero.

Kjo i jep një tensori i cili është i të njëjtit lloj si forma Kähler. Në koordinata lokale,

$$Ric = \sqrt{-1} \sum R_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

5.5 Hipoteza e Calabit

Sipas një teoreme të njohur të Chern-it, forma Ricci e pjesëtuar nga 2π është $(1, 1)$ - formë që përfaqëson klasën e parë Chern të një manifoldi kompakt kompleks. Rrënjosur në përpjekjen e tij për të gjetur një metrikë kanonike Kähler për një manifold Kähler, në vitin 1954, E. Calabi (Calabi, 1957) propozoi një hamendje "Për çdo $(1, 1)$ -form të mbyllur $\frac{1}{2\pi}C_1(X)$, ku C_1 përfaqëson klasën e parë Chern të manifoldit Kähler X , ka një metrikë të veçantë Kähler në të njëjtën klasë me Kähler-in ku tensori Ricci i të cilit është $(1, 1)$ -formë e mbyllur $C_1(X)$."

Fillimisht, Calabi kuptoi se supozimi i tij mund të reduktohet në një ekuacion kompleks Monge-Ampère.

5.6 Teorema Yau

Në vitin 1976, Yau (1977, 1979) provoi hipotezën e Calabit duke zgjidhur ekuacionin kompleks të Monge-Ampère-it për një funksion me vlerë reale ϕ

$$\det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) = e^f \det g_{i\bar{j}}$$

ku e^f është çdo funksion i sheshtë me mesatare 1 dhe $g_{i\bar{j}} \partial_i \partial_{\bar{j}} \phi$ është e nevojshme të jetë përcaktuar pozitiv. Zgjidhja ϕ e ekuacionit të mësipërm siguron se metrika Kähler

$$\omega + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \phi$$

mund të arrijë çdo formë (lakimi) Ricci në klasën e përmendur në supozimin e Calabit.

Kjo do të thotë se çdo manifold Kähler kompakt me $C_1 = 0$ pranon një metrikë Kähler të holonomisë $SU(n)$. Kjo teoremë është e vlefshme vetëm për manifoldet kompakte. Në mënyrë që ajo të jetë e vlefshme edhe në rastet e pakompaktuara, duhet të plotësohen disa kushte plotësuese.

5.7 Hapësirat Calabi-Yau

Ka shumë përkufizime të hapësirave Calabi-Yau, të cilat nuk janë mjaft ekuivalente me njëra-tjetrën. Një hapësirë Calabi-Yau është një manifold X me një matricë Riemannian-e g , që plotëson tri kushte:

1. **X është një manifold kompleks.** Kjo do të thotë që X duket në nivel lokal si C_n , në kuptim që ai mund të mbulohet me patches që pranojnë koordinata lokale komplekse

$$z_1, \dots, z_n$$

dhe funksionet midis patches janë holomorfe.

Në veçanti, dimensioni real i X është $2n$. Për më tepër metrika g duhet të jetë Hermitiane në lidhje me strukturën komplekse, që do të thotë:

$$g_{ij} = g_{\bar{i}\bar{j}} = 0,$$

kështu që përbërësit e vetëm jozero janë $g_{\bar{i}\bar{j}}$.

2. X është Kähler.

Kjo do të thotë që në nivel lokal në X ekziston një funksion real K i tillë që:

$$g_{\bar{i}\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} K.$$

Duke pasur parasysh një metrikë Hermitiane, mund të përcaktohet forma e lidhur Kähler, e cila është e llojit $(1, 1)$,

$$k = g_{\bar{i}\bar{j}} dz_i \wedge d\bar{z}_j.$$

Kushti Kähler është që $dk = 0$.

3. X pranon një formë n -formë holomorlike globale.

Në secilën pach koordinatë lokale të X -it mund të shkruajmë shumë forma të tilla,

$$\Omega = f(z_1, \dots, z_n) dz_1 \wedge \Delta \Delta \Delta \wedge dz_n,$$

për një funksion holomorfik arbitrar f . Kushti është se secila Ω ekziston globalisht në X . Për X kompakt ekziston gjithmonë një Ω e tillë deri në një skalar të përgjithshëm; ekzistenca e saj është e barabartë me kushtin topologjik:

$$c_1(TX) = 0,$$

ku TX është tangjent bundle i X .

5.8 Numrat Hodge të një n -foldi Calabi-Yau

Numrat Betti janë numra topologjikë themelorë të lidhur me një manifold. Numri Betti b_p është dimensioni i p -th de Rham Kohomologjisë i një manifoldi M , $H^p(M)$. Kur manifoldi ka një metrikë, numrat Betti njehsojnë numrin e p -formave linearisht të pavarura harmonike të manifoldit. Për manifoldet Kähler numrat Betti mund të zbërthehen në aspektin e numrave Hodge $h^{p,q}$, të cilët njehsojnë numrin e (p, q) -formave harmonike në manifold

$$b_k = \sum_{p=0}^k h^{p,k-p}.$$

5.9 Diamanti Hodge

Një n -fold Calabi-Yau karakterizohet nga vlerat e numrave Hodge të tij. Ky nuk është një karakterizim i plotë, pasi ndonjëherë disa manifolde Calabi-Yau inequivalente kanë të njëjtat numra Hodge.

Numrat Hodge të një n -foldi Calabi-Yau kënaqin ekuacionin

$$h^{p,0} = h^{n-p,0}.$$

Kjo rrjedh nga fakti se hapësirat $H^p(M)$ dhe $H^{n-p}(M)$ janë isomorlike. Konjugimi kompleks jep lidhjen:

$$h^{p,q} = h^{q,p}$$

dhe dualiteti i Poincarè-se jep lidhjen shtesë

$$h^{p,q} = h^{n-p,n-q}.$$

Një manifold i thjeshtë i lidhur e ka zero grupin themelor (grupi i parë homotopik) dhe prandaj zhduket grupi i parë homologjik. Si rezultat,

$$h^{1,0} = h^{0,1} = 0.$$

Në rastin e rëndësishëm të $n = 3$, përshkrimi i plotë manifoldeve Calabi-Yau kërkon vetëm specifikimin e $h^{1,1}$ dhe $h^{2,1}$. Bashkësia e plotë e numrave Hodge mund të tregohet në diamantin Hodge

$$\begin{array}{cccc}
 & & h^{3,3} & \\
 & & h^{3,2} & h^{2,3} \\
 & h^{3,1} & h^{2,2} & h^{1,3} \\
 h^{3,0} & h^{2,1} & h^{1,2} & h^{0,3} \\
 & h^{2,0} & h^{1,1} & h^{0,2} \\
 & h^{1,0} & h^{0,1} & \\
 & & h^{0,0} &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccc}
 & & 1 & \\
 & & 0 & 0 \\
 & 0 & h^{1,1} & 0 \\
 1 & h^{2,1} & h^{2,1} & 1 \\
 & 0 & h^{1,1} & 0 \\
 & 0 & 0 & \\
 & & 1 &
 \end{array}$$

Duke përdorur marrëdhëniet e diskutuara më lart, përcaktohet se karakteristika Euler e një trefoldi Calabi-Yau, që jepet nga ekuacioni

$$\chi = \sum_{p=0}^6 (-1)^p b_p = 2(h^{1,1} - h^{2,1}).$$

Ne rastin kur $n = 4$ korrespondon me katër-foldin Calabi-Yau. Këto manifolde karakterizohen nga tri numra të pavarur Hodge $h^{1,1}, h^{1,3}, h^{1,2}$. Diamanti Hodge merr formën:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 0 & & 0 \\ & & & 0 & h^{1,1} & 0 & \\ & & 0 & h^{2,1} & h^{2,1} & 0 & \\ 1 & & h^{3,1} & h^{2,2} & h^{3,1} & & 1 \\ & 0 & h^{2,1} & h^{2,1} & 0 & & \\ & & 0 & h^{1,1} & 0 & & \\ & & & 0 & 0 & & \\ & & & & 1 & & \end{array}$$

Për katër-foldin Calabi-Yau ekziston një lidhje shtesë midis numrave Hodge, përkatësisht

$$h^{2,2} = 2(22 + 2h^{1,1} + 2h^{1,3} - h^{1,2}).$$

Si rezultat, vetëm tre nga numrat Hodge mund të jenë të ndryshme në mënyrë të pavarur.

Karakteristika Euler për këtë arsye mund të shkruhet si:

$$\chi = \sum_{p=0}^8 (-1)^p b_p = 6(8 + h^{1,1} + h^{3,1} - h^{2,1}).$$

5.10 Shembuj manifoldesh Calabi-Yau

5.10.1 Një-foldet Calabi-Yau

Shembujt më të thjeshtë të manifoldeve Calabi-Yau janë ato që kanë një dimension kompleks. Një shembull i thjeshtë jokompakt është plani kompleks $\mathbb{C}$, që përshkruhet në varësi të koordinatave $(z, \bar{z})$.

- Plani Kompleks

Ai mund të përshkruhet në termat e një metrike të sheshtë

$$ds^2 = |dz|^2$$

dhe forma holomorlike është:

$$\Omega = dz$$

- Torusi T^2

I vetmi një-fold Calabi-Yau kompakt është Torusi T^2 .

5.10.2 Dy-foldet Calabi-Yau

Shembuj jokompakt

Disa shembuj jokompaktë të dy foldeve Calabi-Yau, të cilat kanë dy dimensione komplekse, mund të merren si produkte të dy manifoldeve të mëparshme: $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \mathbb{C} \times T^2$.

- Hapësirat "ALE"

Hapësirat "asimptotikisht lokalisht Euklidiane" ose "ALE" formojnë një klasë të rëndësishme jokompakte të 2-foldeve Calabi-Yau-s, me 2 përmasa komplekse. Përafërsisht, këto hapësira merren si $\mathbb{C}^2/G$, ku G është një nëngrup i fundëm i $SU(2)$ duke vepruar në mënyrë lineare në $\mathbb{C}^2$.

Shembuj kompaktë: $T^4, K3$

$K3$ dhe T^4 janë vetëm dy shembuj të manifoldesh Kähler katërdimensionale kompakte reale. Si rezultat, këto manifolde janë shembujt e vetëm kompakt të dy-foldeve Calabi-Yau.

- Sipërfaqet $K3$

Shumë sipërfaqe komplekse $K3$ nuk janë algjebrike. Kjo do të thotë se ato nuk mund të futen në ndonjë hapësirë projektive si një sipërfaqe e përcaktuar nga ekuacionet polinomiale.

Të gjitha sipërfaqet komplekse K3 janë difeomorlike me njëra-tjetrën (provuar nga Kunihiko Kodaira). Yum-Tong Siu (1983) tregoi se të gjitha sipërfaqet komplekse K3 janë manifolde Kähler.

Numrat Hodge të K3-it

Kohomologjia e K3 mund të llogaritet duke kombinuar kontributet e hapësirës T4 dhe hapësirës Eguchi-Hanson. Hapësire e Eguchi-Hanson kontribuon në gjithsej 16 gjeneratorë të $H^{1,1}$, një për secilën nga 16 hapësirat e përdorura. Në T4 katër përfaqësuesit e klasave kohomologjike $H^{1,1}$ ngelen dy identifikimet $\mathbb{Z}_2$:

$$dz^1 \wedge d\bar{z}^1, dz^1 \wedge d\bar{z}^2, dz^2 \wedge d\bar{z}^1, dz^2 \wedge d\bar{z}^2.$$

Kjo jep në total $h^{1,1} = 20$. Përveç kësaj, ekziston një klasë $H^{2,0}$ e përfaqësuar nga $dz^1 \wedge dz^2$ dhe një klasë $H^{2,0}$ përfaqësuar nga $d\bar{z}^1 \wedge d\bar{z}^2$. Si rezultat, numrat Hodge të K3-it jepen nga diamanti Hodge:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & 0 & & 0 \\ & 1 & 20 & & 1 \\ & & 0 & & 0 \\ & & 1 & & \end{array}$$

Kështu, numrat Betti jozero të K3 janë $b_0 = b_4 = 1, b_2 = 22$, dhe karakteristika Euler është $\chi = 24$.

5.10.3 Tre-foldet Calabi-Yau

Klasifikimi i plotë i n-foldeve të Calabi-Yau-t për $n > 2$ është një problem i pazgjidhur dhe nuk është aspak e qartë se numri i 3 foldeve Calabi-Yau kompakt është i pafund. Janë ndërtuar shumë shembuj të 3 foldeve Calabi-Yau, ne do të përmendim disa prej tyre që janë më të rendësishëm.

Një 3-fold Calabi-Yau është një manifold Kähler (M, J, g) me 3 dimensione komplekse dhe me një vëllim kovariant konstant holomorfik i formës Ω tillë që kënaq ekuacionin:

$$\omega^3 - \frac{3i}{4}\Omega \wedge \bar{\Omega}$$

ku ω është formë Kähler.

Një mënyrë tjetër ekuivalente për të përcaktuar një 3-fold Calabi-Yau është që të kërkojmë që 6-foldi Riemannian (M, g) ka grup holonomik $Hol(g)$ të përfshirë në $SU(3)$. Këto manifolde Calabi-Yau janë më të rëndësishme në aplikimet e Teorisë së Fijeve.

Ne kemi treguar tashmë se numrat Hodge të manifoldeve Kähler kënaqin ekuacionin:

$$h^{p,q} = h^{3-p,3-q}$$

dhe një dualitet konjugimi kompleks

$$h^{p,q} = h^{q,p}.$$

Për manifoldet Calabi-Yau, dualiteti ndonjëherë quhet dual holomorfik. Diamanti Hodge ka formën:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 0 & & 0 \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ 1 & h^{2,1} & & h^{2,1} & & 1 & \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & & 1 & & \end{array}$$

Dy shembujt kanë qenë shumë të rëndësishëm në historinë e Teorisë së Fijeve janë: Kuintiku në $\mathbb{CP}^4$, dhe manifoldet Tian-Yau.

Është gjetur se:

$$c(\mathbb{CP}^m) = (1+x)^{m+1}.$$

Le të jetë X një hipersipërfaqe e lëmuar në $\mathbb{CP}^m$ e përcaktuar si lokusi zero i një polinomi p me gradë d .

Klasa Chern e X është

$$c(X) = \frac{(1+x)^{m+1}}{1+dx}$$

Klasa e parë Chern është:

$$c_1(X) = [(m+1) - d]x$$

Prandaj, ne kemi gjetur një realizim të qartë të kushtit Calabi-Yau për hiper-sipërfaqet; gjendja $c_1 = 0$ nënkupton një kusht në shkallën e ekuacionit polinomial, $d = m + 1$. Nëse duam një trefold Calabi-Yau, ne kemi $m = 4$ dhe prandaj X duhet të jetë dhënë nga locusi zero i një polinomi të shkallës 5, që është një kuintik në $\mathbb{CP}^m$.

Nëse polinomi është i shkallës d_i , klasa e përgjithshme Chern (duke përdorur faktin se $c_1 = 0$), gjendet:

$$C(Y) = 1 + \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^l d_i^2 \right) - (n+1) \right] x^2 - \frac{1}{3} \left[\left(\sum_{i=1}^l d_i^3 \right) - (n+1) \right] x^3$$

Ky rezultat do të jetë i dobishëm për llogaritjen e karakteristikës Euler përmes integritit të klasës së tretë Chern mbi manifoldin Y .

Kuintiku në $\mathbb{CP}^4$

Ne tani do të përqëndrohemi në kuintikun Q në $\mathbb{CP}^4$, i cili është dhënë nga një ekuacion polinomial i shkallës 5 në koordinatat homogjene të $\mathbb{CP}^4$. Sipas rezultateve të pjesën e mëparshme, ne kemi:

$$c(Q) = 1 + 10x^2 - 40x^3.$$

Për të gjetur karakteristikën e tij Euler, ne duhet të integrojmë $-40x^3$ në Q .

Duke përdorur dualitetin Poincarè dhe teoremën e de Rham-së që kanë të bëjnë homologjinë dhe kohomologjinë ne gjejmë se

$$\chi(Q) = \int_Q c_3(Q) = \int_Q (-40x^3) = \int_{\mathbb{CP}^4} (-40x^3) \wedge (50x) = -200$$

Tani për të vazhduar më tej studimin e kuintikut ne duhet të përcaktojmë numrat e saj Hodge.

Për kuintikun në $\mathbb{CP}^4$, ka fillimisht 126 parametra. Ka $h^{2,1}(Q) = 126 - (25 - 1) - 1 = 101$ parametrat që përshkruajnë strukturën komplekse të Q . Meqë nga $\chi = 2(h^{1,1} - h^{2,1})$ ne kemi $h^{1,1}(Q) = 1$ që ka vetëm një Ricci-flat

Kähler në kuintik. Prandaj hapësira moduli e struktursë Kähler është një-dimensionale.

Për ta përmbledhur rezultatin për Kuintikun Q në $\mathbb{CP}^4$ ka karakteristikë Euler $\chi = -200$ dhe diamant Hodge:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 0 & & 0 & \\
 & 0 & & 1 & & 0 & \\
 1 & & 101 & & 101 & & 1 \\
 & 0 & & 1 & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & 1 & &
 \end{array}$$

Tani e dimë se Q është një manifold Calabi-Yau, dhe kemi studiuar atë duke përdorur klasat Chern.

• Manifoldet Tian-Yau

Në mënyrë për të studiuar manifoldet Tian-Yau është duke përgjithësuar rezultatet e seksionit të fundit të manifoldeve të përcaktuara nga lokusi zero i një numri të fundmë të ekuacioneve polinomiale homogjene në një produkt të hapësirave projektive.

Hapësira të tilla do të shënohen "matricë e konfigurimit", e cila jep gradën e secilit polinom në variablat e secilës hapësirë projektive. Çdo kolonë korrespondon me shkallën e një prej polinomeve. Ne zakonisht karakteristikën Euler të manifoldit e shënojmë te matrica e konfigurimit në fund djathtas.

Kuintiku në $\mathbb{CP}^4$ është dhënë nga

$$\mathbb{CP}^4 \mid 5 \mid_{200}$$

ndërsa manifoldi Tian-Yau jepet nga

$$\begin{array}{c} \mathbb{CP}^3 \\ \mathbb{CP}^3 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{array} \right|_{-18}$$

Me fjalë të tjera, manifoldi Tian-Yau është dhënë nga tri ekuacione polinomiale në $\mathbb{CP}^3 \times \mathbb{CP}^3$: një me gradë 1 në të dyja $\mathbb{CP}^3 - t$, një me gradë 3 në $\mathbb{CP}^3$ e parë, dhe një me gradë 3 në $\mathbb{CP}^3$ e dytë. Në qoftë se x_μ dhe y_m janë koordinatat respektivisht homogjene e dy $\mathbb{CP}^3$, përfaqëson sistemin e ekuacioneve

$$f^{\mu\nu\rho}x_\mu x_\nu x_\rho = 0, \quad g^{mnr}y_m y_n y_r = 0, \quad h^{\mu n}x_\mu y_n = 0$$

ku f, g, h janë koeficientët e ekuacioneve.

Manifoldi Tian-Yau është dhënë nga ekuacionet e mëposhtme me koeficientë fiks:

$$\sum_{i=0}^3 x_i y_i = 0 \quad \sum_{i=0}^3 (x_i)^3 = 0 \quad \sum_{i=0}^3 (y_i)^3 = 0$$

Tani ne duam të llogaritim karakteristikën Euler dhe numrat Hodge të këtij konfigurimi. Mund të përgjithësohen rezultatet e seksionin të mëparshëm.

Le të jetë X një ndërprerje e plotë e lëmuar manifoldi i përcaktuar nga matrica e konfigurimit

$$\begin{array}{c|ccc} \mathbb{CP}^{n_1} & d_1^1 & \cdots & d_N^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{CP}^{n_l} & d_1^l & \cdots & d_N^l \end{array},$$

Duke pasur parasysh një konfiguracion të tillë, ne mund të përgjithësojmë llogaritjen e mëparshme të klasës Chern duke marrë

$$c(X) = \frac{\prod_{i=1}^l (1 + x_r)^{n_r+1}}{\prod_{a=1}^N (1 + \sum_{s=1}^l d_a^s x_s)}.$$

Klasa e parë Chern është

$$c_1(X) = \sum_{i=1}^l (n_r + 1 - \sum_{a=1}^N d_a^r) x_r$$

Për $c_1(X)$ të barabartë me zero, të gjithë koeficientët në shumë duhet të zhduken, dhe ne përcaktojmë kushtin

$$\sum_{a=1}^N d_a^r = n_r + 1, \quad \forall r = 1, \dots, l.$$

Për manifoldet Tian-Yau, $l = 2$, $n_1 = n_2 = 3$, $N = 3$ dhe $d_1^1 = d_1^2 = 1$, $d_2^1 = 3$, $d_2^2 = 0$, $d_3^1 = 0$ dhe $d_3^2 = 3$. Kushti është plotësuar dhe për këtë arsye manifoldi Tian-Yau është një manifold Calabi-Yau.

Për të gjetur karakteristikën e saj Euler, ne duhet të zgjerojmë klasën totale Chern për të gjetur një shprehje për klasën e tretë Chern. Nëse $c_1(X) = 0$ ne gjejmë se

$$c_3(X) = \sum_{r,s,t=1}^l \left(\frac{1}{3} \left[\delta^{rst}(n_r + 1) - \sum_{a=1}^N d_a^r d_a^s d_a^t \right] \right) x_r x_s x_t$$

Karakteristika Euler e manifoldit Tian-Yau është $\chi = -18$.

Tani le të përpiqemi të gjejmë numrat Hodge të manifoldeve Tian-Yau. Ne do të përdorim të njëjtën metodë si për Kuintikun, pra thjeshtë duke llogaritur parametrat e lira në ekuacionet polinomial.

Dy ekuacionet janë të gradës së tretë me katër variabla, kështu së bashku ata kanë 40 parametra të lirë. Megjithatë, në çdo $\mathbb{CP}^3$ (16-1) prej tyre mund të hiqen nga një ndërrimi homogjen linear i variablave, dhe 1 nga shkallëzimin i përgjithshëm. Prandaj, në këto dy ekuacione janë gjithsej 8 parametra të lirë. Tani ekuacioni i tretë ka 16 koeficientë, dhe 1 mund të hiqet nga shkallëzimi i përgjithshëm. Prandaj, në total ka $15 + 8 = 23$ parametra të lirë.

Më tej, nga ekuacioni $X_3 \in \mathbb{P}_5$, ne gjejmë se manifoldi Tian-Yau e ka karakteristikën Euler -18 dhe diamanti Hodge është:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 0 & & 0 \\ & & & 0 & 14 & & 0 \\ 1 & & 23 & & 23 & & 1 \\ & & 0 & & 14 & & 0 \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & & 1 & & \end{array}$$

Manifoldi Tian-Yau ishte i rëndësishëm historikisht, sepse ishte koleksioni i parë që jepte një spektër për fizikën e energjisë së ulët që dilte nga Teoria e Fijeve. Përpjekjet e para për të gjetur modelin standard nga Teoria e Fijeve, shkencëtarët përdorën atë që quhet tani kompaktimi 'standard' i teorisë heterotike $E8 \times E8$

5.10.4 CP^2 lokal

Një manifold Calabi-Yau jokompakt mund të merret duke filluar me katër koordinata komplekse (x, z_1, z_2, z_3) , të tilla që $(z_1, z_2, z_3) \neq (0, 0, 0)$ dhe duke bërë identifikimin

$$(x, z_1, z_2, z_3) \approx (\lambda^{-3}x, \lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3)$$

për çdo $\lambda \in C^*$.

Kjo hapësirë njihet si hapësira e përgjithshme e bundle line-it $O(-3) \rightarrow CP^2$. Në nivel lokal në CP^2 , hapësira jonë ka strukturën e $CP^2 \times C$. Në këtë kuptim ka "4 drejtime kompakte" dhe "2 drejtime jokompakte" si në figurën 5.3.



FIGURA 5.3: CP^2 lokal

Edhe pse gjeometria lokale CP^2 nuk është kompakte, ajo mund të lindë natyrshëm, edhe në qoftë se fillojmë me një Calabi-Yau kompakte, domethënë ajo përshkruan gjeometrinë e një hapësire Calabi-Yau që përmban një CP^2 .

5.10.5 CP^1 lokal

Njëlloj si shembulli i fundit, mund të fillojmë me katër koordinata komplekse (x_1, x_2, z_1, z_2) , për gjendjen $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$, dhe bëjmë identifikimin

$$(x_1, x_2, z_1, z_2) \approx (\lambda^{-1}x_1, \lambda^{-1}x_2, \lambda z_1, \lambda z_2)$$

për çdo $\lambda \in C^X$.

Kjo jep hapësirën totale të bundle line-it $O(-1) \oplus O(-1) \rightarrow CP^1$. Në mënyrë të ngjashme me shembullin e mëparshëm, ajo është marrë duke filluar me CP^1 , e cila ka "2 drejtime kompakte" dhe më pas bashkangjitur koordinatave x_1, x_2 , të cilat kontribuojnë "4 drejtime jo kompakte" si në figurën 5.4. Ky shembull njihet edhe si "konifoldi i zgjidhur".

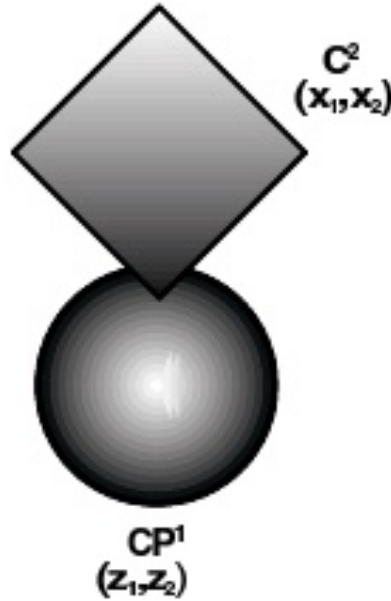


FIGURA 5.4: CP^1 lokal

5.10.6 $CP^1 \times CP^1$ lokal.

Një shembull tjetër standard vjen duke filluar me pesë koordinata komplekse (x, y_1, y_2, z_1, z_2) , me $(y_1, y_2) \neq (0, 0)$ dhe $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$, dhe duke bërë identifikimin

$$(x, y_1, y_2, z_1, z_2) \approx (\lambda^{-2}x, \lambda y_1, \lambda y_2, \mu z_1, \mu z_2)$$

për çdo $\lambda, \mu \in C^X$. Kjo jep hapësirën totale të bundle line-it $O(-2, -2) \rightarrow CP^1 \times CP^1$, ajo ka katër drejtime kompakte dhe dy drejtime jo kompakte.

5.10.7 Konifoldi i deformuar

Duke filluar me koordinatat komplekse $(x, y, z, t) \in C^4$, këtë herë pa ndonjë identifikim projektiv, shikojmë hapësirën e zgjidhjeve

$$xy - zt = \mu.$$

Kjo jep një 3-fold Calabi-Yau për çdo vlerë $\mu \in C$, kështu që μ përfshin hapësirën njëdimensionale të moduleve të strukturave komplekse. Nëse $\mu = 0$ atëherë Calabi-Yau ka një veçanti në $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$, është njohur si "singulariteti i njëfishtë".

5.11 Disa konkluzione statistikore e tre foldeve Calabi-Yau

Klasifikimi i manifoldeve Calabi-Yau mund të bëhet dhe me atë të politopeve refleksive në përmasa të ndryshme, dhe puna intensive e kompjuterit të Kreuzer dhe Skarke ishte që të kombinojë të gjitha këto politope.

Për $n = 1$, ekzistojnë 16 politope të tilla në R^2 , dhe ne kemi një-foldet Calabi-Yau, ose kurba eliptike.

Për $n = 2$, janë 4319 politope të tilla në R^3 , dhe ne kemi dy-foldet Calabi-Yau, ose sipërfaqet K3.

Për $n = 3$, janë 473 800 776 politope të tilla (ka 30108 palë të dallueshme të numrave Hodge($h^{1,1}, h^{1,2}$)).

Në parim, e njëjta gjeometri Calabi-Yau mund të lind nga polytope të ndryshme refleksive. Ka pothuajse me siguri shumë më tepër se gjysmë miliard tre-folde Calabi-Yau.

Për fat të mirë, numrat Hodge varen vetëm nga politope dhe jo nga zgjedhja e desingularizimit. Megjithatë, duke pasur parasysh kompleksitetin e problemit, është e domosdoshme që të analizojmë të dhënat në dispozicion të cilat janë hartuar gjatë viteve, si dhe nxjerrin konkluzione statistikore përpara se të kthehemi në trajtime analitike.

5.11.1 Shpërndarja e $h^{1,1} - h^{1,2}$

Shpërndarja e $h^{1,1} - h^{1,2}$ përbëhet nga shumë kurba, ku çdo kurbë përcaktohet nga r-vlera, ku $r = h^{1,1} + h^{1,2}$

$h^{1,1}$	$h^{1,2}$	$h^{1,1} + h^{1,2}$	$h^{1,1} - h^{1,2}$	f
9	19	28	-10	1
10	18	28	-8	2
12	16	28	-4	1
14	14	28	0	2
16	12	28	4	2
18	10	28	8	2
19	9	28	10	1
11	18	29	-7	2
12	17	29	-5	1
13	16	29	-3	3
16	13	29	3	3
17	12	29	5	1
18	11	29	7	2

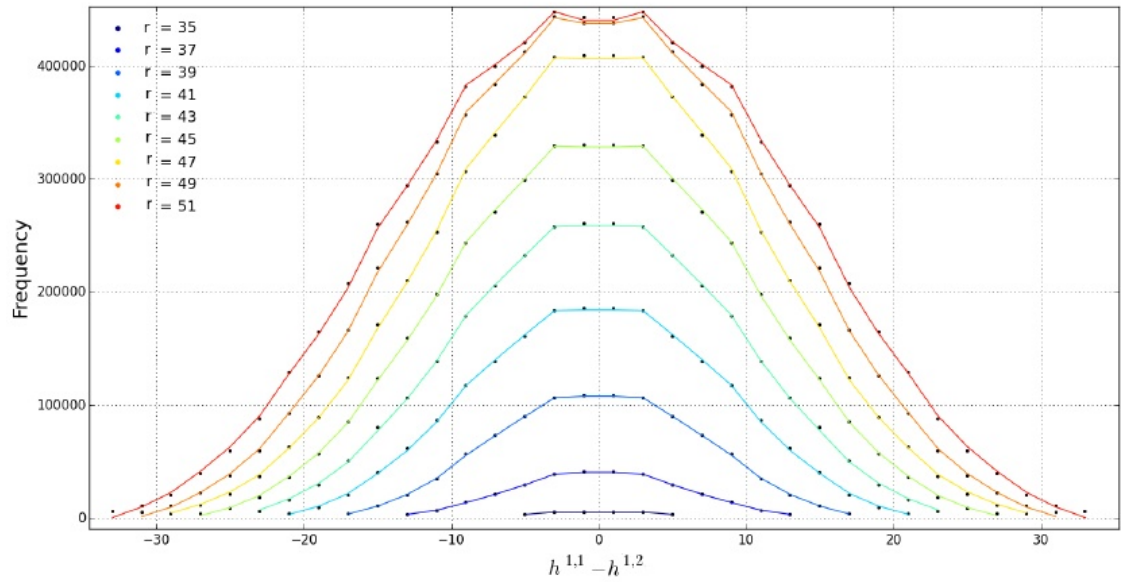


FIGURA 5.5: r-vlera, për $r \in [35 - 51]$, tek

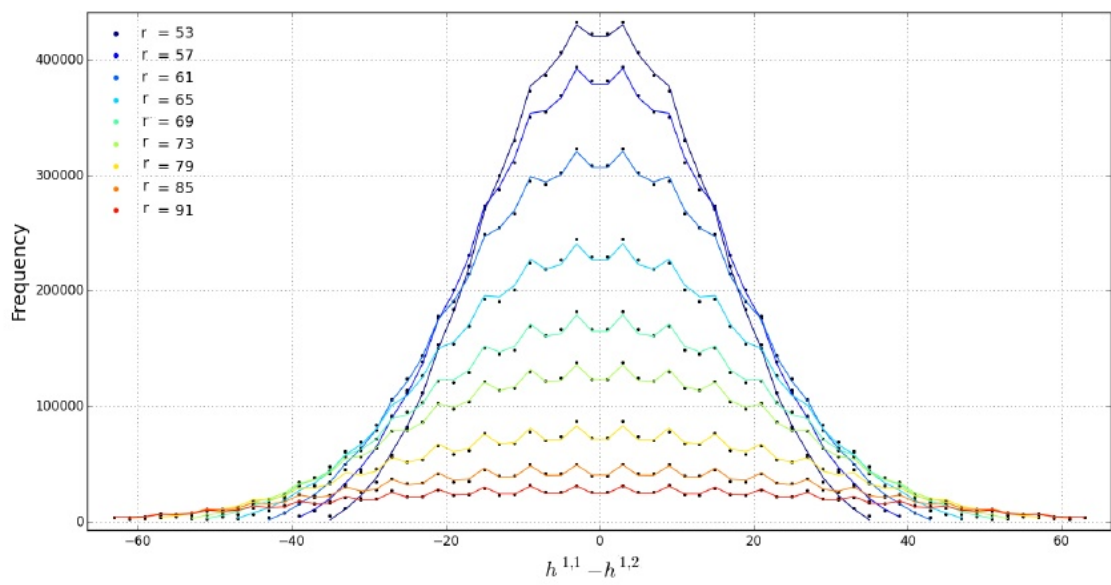


FIGURA 5.6: r-vlera, për $r \in [53 - 91]$, tek

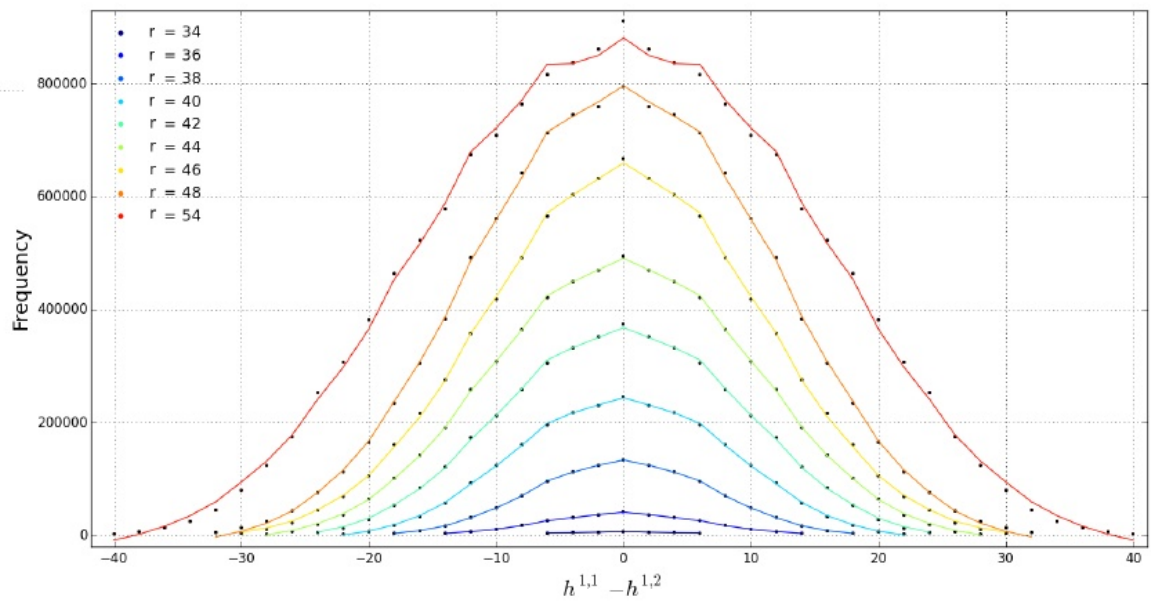


FIGURA 5.7: r-vlera, për $r \in [34 - 54]$, çift

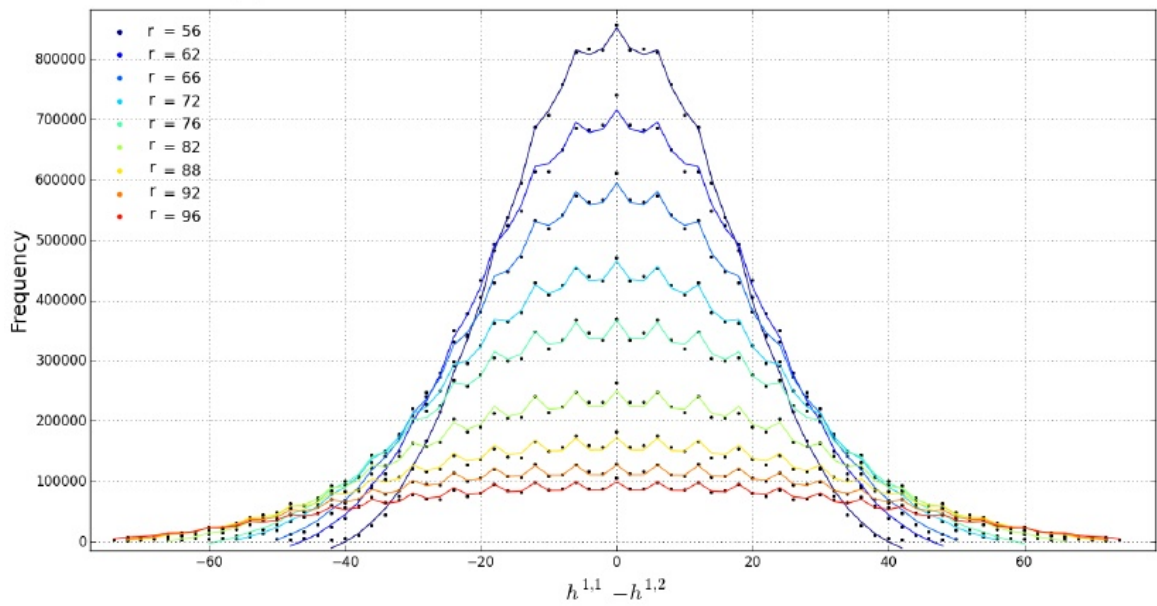


FIGURA 5.8: r-vlera, për $r \in [56 - 96]$, çift

Mund të kryhet një analizë regresioni për çdo kurbë individuale, në mënyrë që të gjendet një funksion që përshkruan shpërndarjen. Funksionet e marrë janë përafrime, modifikime të mëtejshme mund të bëjnë që të gjendet ndonjë funksion edhe më i saktë.

Nga analiza vihet re se secila vijë paraqet një model pseudo-Voigt të modifikuar, bazuar në analizën e regresionit për secilën kurbë. Në përqendrohemi në modelin pseudo-Voigt, pasi ai përshtatet më mirë, ky është një kombinim linear i një shpërndarje Gaussian-e dhe Lorentzian-e (Cauchy):

Densiteti i shpërndaresh është:

$$f(x, A, \mu, \sigma, \alpha) = (1 - \alpha) \frac{A}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \alpha \frac{A}{\pi} \left[\frac{\sigma^2}{(x - \mu)^2 + \sigma^2} \right]$$

me amplitudë (A), qendër në (μ) dhe me parametër të pjesshëm alfa (α).

Ajo që vihet re është se në qoftë se gjendet shpërndarja për një vlerë të caktuar të r -së ne jemi në gjendje të studiojmë çdo kurbë duke përdorur të njëjtin model. Mund të përdoren dhe modele të tjera si shpërndarja normale, ose χ^2 nëse interesohemi për shpërndarjen $h^{1,1} + h^{1,2}$, por modeli pseudo-Voigt përafron më mirë. Saktësia e modelit është 97% deri 99.98%, modeli është më pak i saktë në skajet e shpërndarjes (60 – 80%).

Duhet pasur parasysh se të dhënat e marra janë diskrete dhe modeli i përdorur është për të dhëna të vazhdueshme, por mund të përdoret modeli dhe të diskutohen vetëm pikat fikse.

Funksioni i shpërndarjes në varësi të r -së është:

$$f(x, r, A_0, \alpha) = (1 - c_\alpha) \frac{A_0(r) + a(r) \cos(2\pi c_b x)}{\sqrt{2\pi}(c_{\sigma_1} r + c_{\sigma_2})} e^{\frac{-(x)^2}{2(c_{\sigma_1} r + c_{\sigma_2})^2}} + c_\alpha \frac{A_0(r) + a(r) \cos(2\pi c_b x)}{\pi} \left[\frac{(c_{\sigma_1} r + c_{\sigma_2})^2}{x^2 + (c_{\sigma_1} r + c_{\sigma_2})^2} \right].$$

ku $\alpha(r) = c_\alpha, b(r) = c_b, \sigma(r) = c_{\sigma_1} r + c_{\sigma_2}$.

5.11.2 Shpërndarja e $h^{1,1} + h^{1,2}$

Shënojmë me $q = h^{1,1} - h^{1,2}$. Njëlloj si më sipër shpërndarja jepet nga grafiku 5.9:

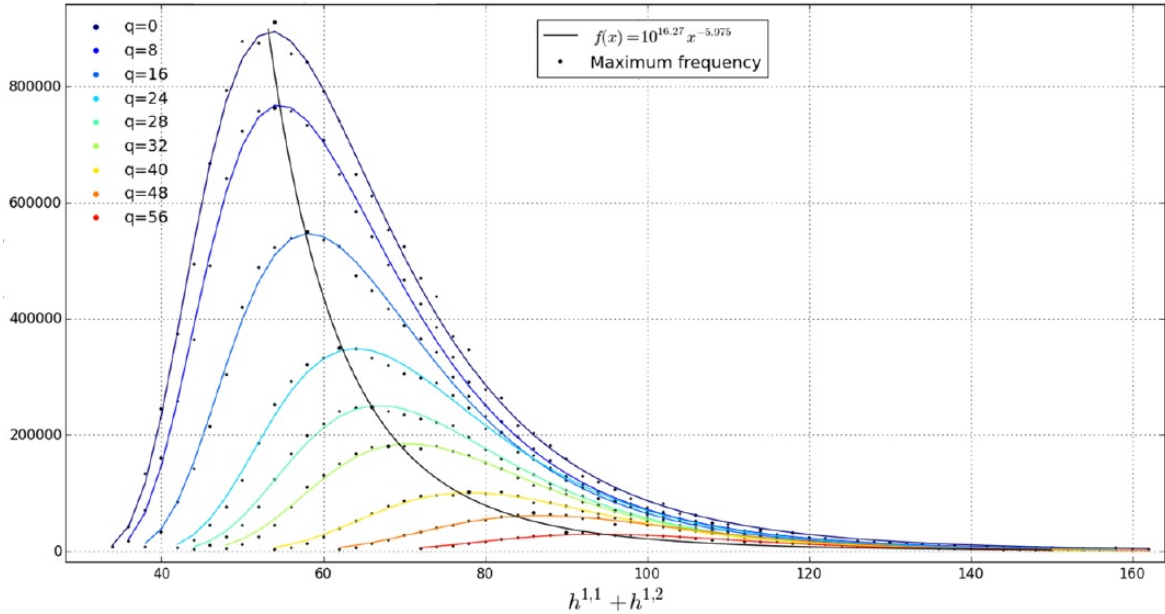


FIGURA 5.9: q -vlera

Ashtu si në shpërndarjen $h^{1,1} - h^{1,2}$ bëhet një analizë regresioni për çdo kurbë brenda shpërndarjes në mënyrë të pavarur, në mënyrë që të shprehet $h^{1,1} - h^{1,2}$ në një funksion të vetëm. Modeli i zgjedhur për të përshkruar $h^{1,1} - h^{1,2}$ është modeli më i thjeshtë i mundshëm Planckian.

$$f(x, A, n, b) = \frac{A}{x^n} \frac{1}{e^{b/(x-22)} - 1}$$

ku A është amplituda, n fuqia, dhe b një konstante reale.

5.11.3 n-foldet Calabi-Yau

Shembuj të një n -foldi Calabi-Yau mund të ndërtohet si një nënmanifold i $\mathbb{C}P^{n+1}$ për $n > 1$. Hapësira projektive komplekse, $\mathbb{C}P^n$, që ndonjëherë mund të shënohet P^n , është një manifold kompakt me n dimensione komplekse. Ajo mund të ndërtohet duke marrë $\mathbb{C}^{n+1}/0$, që është grupi i $(z^1, z^2, \dots, z^{n+1})$ ku z^i nuk janë të gjitha zero dhe duke e bërë identifikimin:

$$(z^1, z^2, \dots, z^{n+1}) \sim (\lambda z^1, \lambda z^2, \dots, \lambda z^{n+1})$$

për çdo $\lambda \neq 0$ komplekse. Kështu, vijat në $\mathbb{C}^n + 1$ korrespondojnë me pika në $\mathbb{C}P^n$.

$\mathbb{C}P^n$ është një manifold Kähler, por jo manifold Calabi-Yau. Shembulli më i thjeshtë është $\mathbb{C}P^1$, i cili është topologjikisht si dy sfera S^2 . Natyrisht, kjo nuk do të pranojë një metrikë Ricci-flat. Metrika standarde prej $\mathbb{C}P^n$, e quajtur metrika *Fubini – Study*, është ndërtuar si më poshtë.

Së pari manifoldi mbulohet nga $n+1$ bashkësi të hapura të dhëna nga $z^a \neq 0$. Pastaj në çdo bashkësi e hapur vendosim koordinatat lokale.

Shembuj të manifoldeve Calabi-Yau mund të merren si nënhapësira të hapësirave komplekse projektive. Në mënyrë të veçantë, le të jetë G një polinom homogjen me shkallë k me koordinata z^a të $\mathbb{C}^{n+2}$, që janë:

$$G(\lambda z^1, \lambda z^2, \dots, \lambda z^{n+2}) = \lambda^k G(z^1, \dots, z^{n+2}).$$

Nënmanifold i $\mathbb{C}P^{n+1}$ që përcaktohet nga:

$$G(z^1, \dots, z^{n+2}) = 0$$

është një manifold kompakt Kähler me n dimensione komplekse. Ky nënmanifold e ka zero klasën e parë Chern për $k = n + 2$. Një mënyrë për të marrë këtë rezultat është të llogaritim në mënyrë eksplicite $c_1(X)$. Për ta bërë këtë theksohet se $c_1(X)$ mund të shprehet nëpërmjet formës së vëllimit, sepse X

është Kähler. Si një formë e volumit në X mund të përdoret fuqia $(n-1)$ e formës Kähler e CP^{n+1} . Një tjetër mënyrë për të marrë këtë rezultat është të përdorin formulën adjunction të gjeometrisë algjebrike, që nënkupton

$$c_1(X) \sim [k - (n + 2)]c_1(CP^{n+1}).$$

Kjo zhduket për $k = n + 2$.

- Për $n=2$

Për shembull po të marrim ekuacionin

$$\sum_{a=1}^5 (z^a)^4 = 0$$

i cili është një ekuacion kuartik që përfaqëson K3. Zgjedhje të ndryshme të polinomieve kuartike japin manifolde K3 që janë difeomorfike me njëra-tjetrën, por kanë struktura komplekse të ndryshme. Deformimet e manifoldeve Calabi-Yau, në veçanti deformimet e strukturës komplekse, janë diskutuar në seksionin më poshtë.

- Për $n=3$

Në rastin e $n = 3$ ky ndërtim përshkruan hipersipëfaqet kuintike në CP^4 . Ky manifold mund të përshkruhet nga polinomi:

$$\sum_{a=1}^5 (z^a)^5 = 0,$$

i cili është një polinom më i përgjithshëm i shkallës së pesë me pesë variabla.

Ndryshimi i koeficienteve të polinomit kuintik korrespondon përsëri me deformimet e strukturës komplekse.

5.12 Deformimet e manifoldeve Calabi-Yau

Manifoldet Calabi-Yau me numra Hodge të specifikuar nuk janë unike. Disa prej tyre janë të lidhura mirë me deformime të parametrave që karakterizojnë forma dhe madhësit e tyre, të cilat quhen moduli. Shpesh, gjithë hapësira moduli të manifoldeve është përmendur si një hapësirë e vetme Calabi-Yau,

edhe pse ai është me të vërtetë një vazhdimësi e familjes së pafundme të manifoldeve. Ky interpretim është supozuar në mënyrë implicite në fillim të ngritur çështjen nëse nuk ekziston një numër i fundmë i manifoldeve Calabi-Yau. Mund të ketë më shumë se një manifold Calabi-Yau me numra të dhënë Hodge që janë topologjikisht të dallueshëm, me hapësira modulare të ndara, pasi numrat Hodge nuk japin një karakterizim të plotë të topologjisë.

5.13 Matrika e deformimit

Format zero të metrikës dhjetëdimensionale (ose fushës së gravitonit) krijojnë një matrikë katërdimensionale $g_{\mu,\nu}$ dhe një bashkësi skalarësh pa masë që vijnë nga komponentët e brendshëm të metrikës $g_{m,n}$. Në kompaktifikimet e Calabi-Yau-t vektorët e fushës pa masë, janë prodhuar nga metrika, sepse $b_1 = 0$. Një fakt i lidhur ngushtë është që tri-foldet Calabi-Yau nuk kanë grupe të vazhdueshme izometrike. Fluktuimet e metrikës në hapësirën e brendshme analizohen duke kryer një ndryshim të vogël

$$g_{m,n} \rightarrow g_{m,n} + \delta g_{m,n}$$

dhe pastaj duke kërkuar që sfondi i ri ende i kënaq kushtet Calabi-Yau. Në veçanti, kërkon që

$$R_{m,n}(g + \delta g) = 0.$$

Kjo çon në ekuacionet diferenciale për δg , dhe numri i zgjidhjeve njehëson numrin e mënyrave të metrikës së mjedisit, duke ruajtur supersimetrinë dhe topologjinë. Koeficientët e këtyre zgjidhjeve të pavarura janë moduli. Ato janë vlerat e pritura të fushave skalare pa masë, të quajtura fusha modulare. Këto moduli parametrojnë ndryshimet e madhësisë dhe formës së brendshme të manifoldeve Calabi-Yau, por jo të topologjisë së tyre.

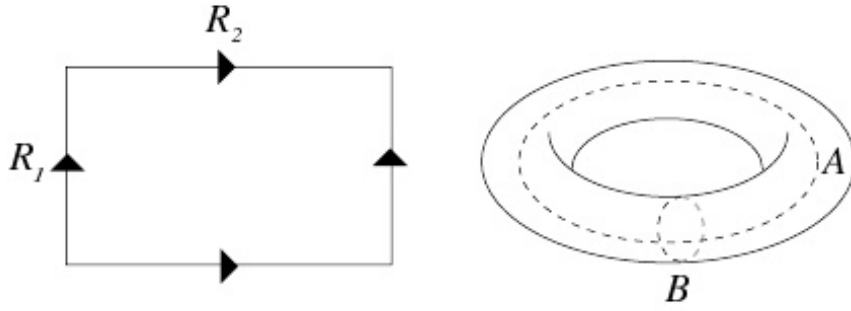


FIGURA 5.10: Një shembull i thjeshtë, torusi

Konsiderojmë torusin $T^2 = S^1 \times S^1$ si në figurën 5.10. Ky torus është përshkruar nga një metrikë e sheshtë. Është e përshtatshme për të përshkruar një torus duke përdorur dy parametra kompleksë τ dhe ρ , të cilët në rastin aktual janë të lidhura me dy rreze:

$$\tau = i \frac{R_2}{R_1} \quad dhe \quad \rho = i R_2 R_1.$$

Forma, ose struktura komplekse, e torusit është përshkruar nga τ , ndërsa madhësia është përshkruar nga ρ . Si rezultat, dy transformimet mund të kryhen në mënyrë që torus të mbetet sërish torus. Në një deformim kompleks, ndryshon struktura τ , ndërsa një deformim i strukturës Kähler ndryshon ρ . Këto deformime janë ilustruar në figurën 5.11.

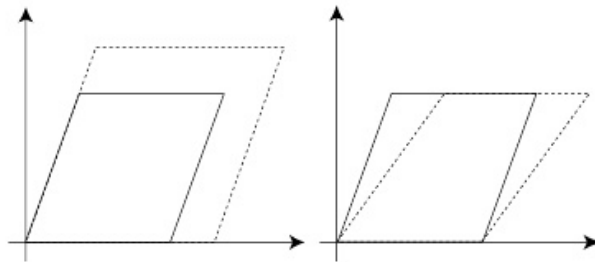


FIGURA 5.11: Deformimi i torusit.

Forma holomorlike e një torusi jepet nga

$$\Omega = dz.$$

Parametri kompleks τ i strukturës mund të shkruhet:

$$\tau = \frac{\int_A \Omega}{\int_B \Omega}$$

ku A dhe B janë ciklet e treguar në figurë.

5.14 Deformimi i three-foldeve Calabi-Yau

Për të analizuar metrikën e deformimit të tre foldeve Calabi-Yau duhet që $g_{m,n}$ dhe $g_{m,n} + \delta g_{m,n}$ së bashku të plotësojnë kushtet Calabi-Yau. Në veçanti, ato përshkruajnë mjedisin Ricci-flat në mënyrë që

$$R_{m,n}(g) = 0 \quad dhe \quad R_{m,n}(g + \delta g) = 0.$$

Disa metrika deformimi përshkruajnë vetëm koordinatat e ndryshuara dhe nuk janë me interes. Për të eliminuar ato, një matës fiks është:

$$\nabla^m \delta g_{m,n} = \frac{1}{2} \nabla_n \delta g_m^m,$$

ku

$$g_m^m = g^{mp} \delta g_{mp}.$$

Po të bëjmë zëvendësimet kemi:

$$\nabla^k \nabla_k \delta g_{mn} + 2R_{m \cdot n}^p \delta g_{pq} = 0$$

Ky ekuacion njihet si ekuacioni Lichnerowicz. Duke përdorur vetitë e strukturës së indeksit të metrikës dhe tensorit të Riemannit të manifoldeve Kähler, konstatohet se ekuacionet për komponentët e përziera $\delta g_{a\bar{b}}$ dhe komponentët pastër δg_{ab} .

Po të marrim një $(1, 1)$ -formë shumë të vogël

$$\delta g_{a\bar{b}} dz^a \wedge d\bar{z}^{\bar{b}}$$

e cila është harmonike në qoftë kënaq ekuacionin e Lichnerowicz-it. Metrika Kähler përcakton formën Kähler $J = i g_{a\bar{b}} dz^a \wedge d\bar{z}^{\bar{b}}$, dhe metrika është e barabartë me

$$\int_M r J \wedge J \wedge J \dots \wedge J > 0, (r - here) \quad r = 1, 2, 3$$

ku z është çdo r -dimensional nënmanifold kompleks e tre-foldit Calabi-Yau

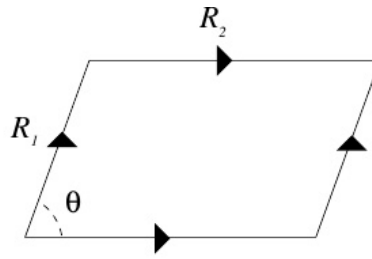


FIGURA 5.12: Forma e një torusi përshkruhet nga një parametër strukture komplekse τ , θ është këndi dhe τ faza.

Nënbashkësia e metrikës së deformimeve do të çojë në një formë Kähler që kënaq ekuacionin quhet koni Kähler. Kjo hapësirë është një kon siç ilustron në figurën 5.13.

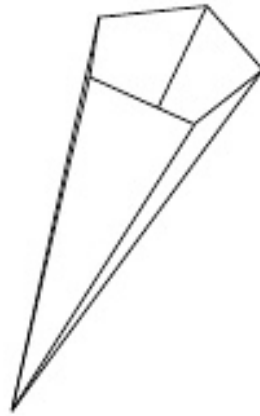


FIGURA 5.13: Koni Kähler

Kapitulli 6

Përfundime dhe rekomandime

- I ashtuquajturi Modeli Standard i Fizikës Grimcore edhe pse është teoria më e suksesshme shkencore e natyrës, në kuptimin se asnjë teori tjetër nuk ka një nivel të tillë të lartë të saktësisë mbi një gamë të plotë të fenomeneve fizike ne treguam që ka disa mangësi të rëndësishme. Gjithashtu treguam se Teoria e Fijeve është një kornizë për një teori të plotë për të njohur të gjithë fenomenet fizike duke përfshirë forcat gravitacionale dhe molekulare në përputhje me mekanikën kuantike dhe relativitetin (për aq sa dihet). Pra Teoria e Fijeve është një teori e plotë e fizikës.
- Për të formuluar dinamiken e një sistemi ne duhet të shkruajmë ekuacionet e lëvizjes ose ndryshe, një veprim. Në këtë punim ne treguam që ekuacioni i lëvizjes për fijet jo-relativiste dhe relativiste është një ekuacion vale. Ekuacioni i gjetur i valës është një ekuacion diferencial i pjesshëm në lidhje me hapësirën dhe kohën. Në mënyrë që të gjendet një zgjidhje duhet të zbatohen dy kushte, kushtet kufitare dhe kushtet fillestare. Kushtet kufitare përmbajnë zgjidhje në kufirin e sistemit, dhe kushtet fillestare kufizojnë zgjidhjet në një kohë të caktuar fillestare. Llojet me të zakonshme të kushteve kufitare janë kushtet kufitare Dirichlet dhe Neumann.
- Ne treguam veprimin e fijeve. Dihet se veprimi i një pike materiale është proporcionale me rrugën në hapësirë-kohë, ndërsa veprimi i një fije ishte proporcionale me zonën. Pra veprimi është një përgjithsim i vepërimit relativist të grimcës që është studiuar në Teorinë e Relativitetit. Treguam gjithashtu se riparameterizimi ishte invariant. Kjo është shumë e rëndësishme, sepse do të thotë se asgjë nuk varet nga koordinatat që ne zgjedhim në world-sheet-et.

- Në punim kemi dhënë një përshkrim të Teorisë së Fijeve për entropinë e vrimave të zeza. Kjo është një nga arritjet më të rëndësishme të Teorisë së Fijeve në kohët e fundit. Ekzistenca e entropisë të vrimës së zezë tregon ekzistencën e gradave mikroskopike të lirisë, të cilat nuk janë të pranishme në teorinë e zakonshme të gravitetit të Ajnshtajn-it. Teoria e Fijeve siguron një kuadër mikroskopik për përdorimin e mekanikës statistikore. Në të gjitha rastet entropia e duhur e sistemit fijeve pajtohet me entropinë e Bekensteinit. Kjo siguron një provë ekzistence për një teori të qëndrueshme mikroskopike të entropisë së vrimës së zezë.
- Diagramet e fijeve janë përfaqësitë e bashkëveprimit të tryre. Fokusi i diagramit të fijeve është world-sheet-i (τ, σ) . Bashkëveprimet analizohen duke përdorur një matës specifik, pasi zgjedhja e matësit të ndikojë në përshkrimin e world-sheet-it. World-sheet-et e fijeve mund të përdoren për të llogaritur amplitudën kuantike mekanike për shpërndarjen.
- Problemi i përmasave shtesë vazhdoi të "shqetësoj" Teorinë e Fijeve, por këto u zgjidhën duke prezantuar idenë e kompaktifikimit, në të cilën dimensionet shtesë përdridhen rreth njëri-tjetrit, ato janë aq të vogla sa që është jashtëzakonisht të vështirë për t'u zbuluar. Ne treguam se kjo arrihet në formën e manifoldeve komplekse Calabi-Yau. Problemi është se Teoria e Fijes nuk ofron asnjë mënyrë reale për të përcaktuar saktësisht se cili nga këto manifolde Calabi-Yau është i duhuri.
- Në këtë tezë, ne kemi trajtuar manifoldet Calabi-Yau duke bërë një klasifikim dhe një renditje të tyre. Duke filluar me një-foldet Calabi-Yau, dy-foldet dhe duke bërë një përgjithësim të tyre.
- M.q.se numri i 3-foldeve Calabi-Yau nuk është përcaktuar akoma dhe mendohet se është i pafundëm në pjesën e fundit kemi bërë një paraqitje grafike të numrit të 3-foldeve Calabi-Yau duke u bazuar të numrat Hodge të tyre. Si dhe kemi dhënë konceptin e deformimeve për këto manifolde.

Kapitulli 7

Referime në konferenca dhe botime në revista shkencore

Referimet në konferencat shkencore janë:

- N. Sadikaj, A. Duka. (2016). Equations of motion of classical non-relativistic strings and relativistic strings. VI Congress of Mathematicians of Macedonia. June 15-18, 2016. Artikulli është botuar edhe në Revistën shkencore: Matematicki Bilten 40 (LXVI) No. 4, 2016 (43-50), Skopje, Makedonija, ISSN 0351-336X (print), ISSN 1857-9914 (online).
- N. Sadikaj, A. Duka. (2016). Some examples of Calabi-Yau manifolds, VI Congress of Mathematicians of Macedonia. June 15-18, 2016. Artikulli është botuar edhe në Revistën shkencore: Matematicki Bilten 40 (LXVI) No. 4, 2016 (32-42), Skopje, Makedonija, ISSN 0351-336X (print), ISSN 1857-9914 (online).
- N. Sadikaj, A. Duka. (2016). Vrimat e zeza në Teorinë e Fijeve. ISCPs 2016, 1st International Scientific Conference on Professional Sciences, Durrës, 25 – 26 Nëntor 2016. ISBN 978-9928-4381-5-7.
- N. Sadikaj, A. Duka. (2017). Bashkëveprimet e fijeve në Sipërfaqet e Riemann-it. Konferenca e Shkencave të Natyrës dhe Teknologjisë. Tiranë, 17-18 nëntor 2017.
- N. Sadikaj, A. Duka. (2016). Teoria e Fijes si Teori Unifikimi në fizikë. Takimi XI i Alb-Shkencës Tiranë, 01 - 03 shtator 2016.

Botimet në revista shkencore janë:

- N. Sadikaj, A. Duka. (2015). Nje hyrje ne Teorine e Fijeve (String Theory), botuar te Buletini Shkencor, numër 3, vëllimi 2, Vlorë 2015. ISSN 2310-6719.

- N. Sadikaj, A. Duka. (2016) Entropy of Strings and Black Holes, botuar te revista shkencore European Journal of Technical and Natural Sciences, Scientific journal No. 3. 2016, ISSN 2414-2352.
- N. Sadikaj, A. Duka. N. Gjika (2018). Bashkëveprimet e fijeve në Sipërfaqet e Riemann-it, botuar te revista shkencore Austrian Journal of Technical and Natural Sciences, Scientific journal No. 7-8 July-August 2018, Vienna, Austria. ISSN 2310-5607.

Bibliography

- [1] A.A. Tseytlin, *Black Holes and Exact Solutions in String Theory*, (2007).
- [2] Alain Connes, *Noncommutative Geometry*, (1993).
- [3] Andrew Neitzke and Cumrun Vafa, *Topological strings and their physical applications*, (2005).
- [4] Andrew Strominger, *Black hole entropy from near-horizon microstates*, (1998).
- [5] Arthur Jaffe, Edward Witten, *Quantum Yang-Mills theory*.
- [6] A. Strominger and C. Vafa, *Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy*, (1996).
- [7] A. Sen, *Extremal black holes and elementary string states*, (1995).
- [8] A. Klemm, B. Lian, S. S. Roan and S. T. Yau, *Calabi-Yau fourfolds for M theory and F theory compactifications*, (1998).
- [9] A. Klemm, B. Lian, S-S. Roan and S-T. Yau, *Calabi-Yau fourfolds for M- and F-Theory compactifications*, (1997).
- [10] A.N. Schellekens, *Introduction to String Theory*, (2016).
- [11] Bernard Schutz *A First Course in General Relativity, Second Edition*, (2009).
- [12] Brian Greene *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory*, (1999).
- [13] Brian Greene *String Theory on Calabi-Yau manifolds*, (1997).
- [14] Brian Greene, *The Elegant Universe*, (1999).
- [15] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory, Second Edition*, Cambridge University Press, (2009).
- [16] B. M. Barbashov, V. V. Nesterenko, *Introduction to the Relativistic String Theory*, (1990).

- [17] C.G. Callan, R.C. Myers and M.J. Perry, *Black Holes in String Theory*, (1989).
- [18] C.V. Johnson, *"D-branes", Cambridge University Press*, (2003).
- [19] Chin-Lung Wang, *Curvature Properties of the Calabi-Yau Moduli*, (2003).
- [20] David Tong, *Electromagnetism*, (2015).
- [21] David Tong, *String Theory*, (2009).
- [22] David Tong, *String Theory*, (2012).
- [23] D. R. Morrison and C. Vafa, *Compactifications of F theory on Calabi-Yau three-folds. 1 and 2*, (1996).
- [24] E. Verlinde, *Conformal field theory and its application to strings*, (1962).
- [25] Edward Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, (1995).
- [26] E. Witten, *Phases of N=2 theories in two dimensions*, (1993).
- [27] E. Witten, *Topological sigma models*, (2007).
- [28] E. Papantonopoulos, *Physics of Black Holes: A Guided Tour*, (2009).
- [29] Eric D'Hoker and D. H. Phong, *Lectures on supersymmetric yang-mills theory and integrable systems*, (2007).
- [30] Eugenio Calabi, *The space of Kähler metrics*, (1954).
- [31] Gary T. Horowitz, *The Dark Side of String Theory: Black Holes and Black Strings*, (1992).
- [32] G.T. Horowitz and A. Strominger, *Black strings and p-branes*, (1991).
- [33] Jacob Bekenstein *Black holes and entropy*, (1973).
- [34] Felix Opitz, *The Differential Geometric View of Statistics and Estimation*, (2009).
- [35] Hiroshi Ooguri, Andrew Strominger and Cumrun Vafa, *Black Hole Attractors and the Topological String*, (2004).
- [36] Hyun Seok Yang, Sangheon Yun, *Calabi-Yau Manifolds, Hermitian Yang-Mills Instantons and Mirror Symmetry*, (2014).

- [37] I.Dolgachev, M.Gross, *Elliptic Three-folds I: Ogg-Shafarevich Theory*, (2007).
- [38] J. H.Schwarz, *String Theory Origins of Supersymmetry*, *arXiv:hep-th/0011078v1*, (2010).
- [39] Juan Maldacena, Andrew Strominger, Edward Witten, *Black hole entropy in M-theory*, (1997).
- [40] J.L. Basdevant and J. Dalibard, *Quantum Mechanics*, (2005).
- [41] J. Li and S.-T. Yau, *The Existence of Supersymmetric String Theory with Torsion*, (2005).
- [42] , John H. Schwarz, *String Theory in Twentieth Century*, (2007).
- [43] J. Polchinski, *"String Theory", Volumes I and II*, Cambridge University Press, (1998).
- [44] Joseph Polchinski, *String Theory: Volume 1, An Introduction to the Bosonic String*, (1998).
- [45] Joseph Polchinski, *String Theory Volume Two. Superstring Theory and Beyond*, (2005).
- [46] Joseph Polchinski, *Dualities of Fields and Strings*, (2014).
- [47] Joseph Polchinski, *Why trust a theory? Some further remarks (part 1,2)*, (2016).
- [48] Joseph Polchinski, *String Theory to the Rescue*. (2015).
- [49] Juan Maldacena, *Black Holes and Holography Holography in String Theory*, (2005).
- [50] J. D. Bekenstein, *Black holes and entropy*, (1973).
- [51] J. D. Bekenstein, *Generalized second law of thermodynamics in black hole physics*, (1974).
- [52] K. Becker, M. Becker, J. H. Schwarz, *String Theory and M-Theory: A modern introduction*, Cambridge University Press, (2007).
- [53] Kevin Wray, *An Introduction to String Theory*, (2011).
- [54] Leonard Susskind, James Lindesay, *An Introduction to Black Holes, Information, and String Revolution*, (2005).

- [55] Lian, Bong; Liu, Kefeng; Yau, Shing-Tung, *Mirror principle, I, II, III, IV*, (1997-2000).
- [56] L. A Goumé, *Riemann Surfaces and String Theories*, (1986).
- [57] L. Susskind, J. Lindesay, *Black holes, information and String Theory revolution. The Holographic Universe*, (2005).
- [58] L. Susskind, *Some speculations about black hole entropy in string theory*, (1993).
- [59] L. Randall and R. Sundrum, *An Alternative to compactification*, (1999).
- [60] L. B. Anderson, J. Gray, A. Lukas and E. Palti, *Two Hundred Heterotic Standard Models on Smooth Calabi-Yau Threefolds*, (2011).
- [61] Mark Gross, *A finiteness theorem for elliptic Calabi-Yau threefolds*, (1994).
- [62] M. Gross, D. Huybrechts, and D. Joyce, *Calabi-Yau Manifolds and Related Geometries*, (2003).
- [63] M. R. Douglas, *The Statistics of string / M theory vacua*, (2003).
- [64] M. Seifert, *Calabi-Yau Compactification*, (2004).
- [65] Nathan Seiberg, Edward Witten , *String Theory and Noncommutative Geometry*, (1999).
- [66] N.Hitchin, "Generalized Calabi-Yau manifolds," [arXiv: math.DG/0209099]., (2002).
- [67] P. Candelas and X. C. de la Ossa, *Comments on conifolds*, (1990).
- [68] P. Candelas, A. M. Dale, C. A. Lutken, R. Schimmrigk, *Complete Intersection Calabi-Yau Manifolds*, (1988).
- [69] P. Candelas, R. Davies, *New Calabi-Yau Manifolds with Small Hodge Numbers*, (2010).
- [70] P. Candelas, X. de la Ossa and F. Rodriguez-Villegas, *Calabi-Yau manifolds over finite fields. 1 and 2*, (2013).
- [71] P. Candelas, A. Constantin and C. Mishra, *Calabi-Yau Threefolds with Small Hodge Numbers*, (2018).

- [72] P. Candelas and R. Davies, *New Calabi-Yau Manifolds with Small Hodge Numbers*, (2010).
- [73] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, (2007).
- [74] R. C. Myers, *Black holes and String Theory*, (2001).
- [75] R. M. Wald, *The thermodynamics of black holes*, (2001).
- [76] Rhiannon Gwyn, *String theory in the early universe*, (2009).
- [77] Rhys Davies, *The Expanding Zoo of Calabi-Yau Threefolds*, (2011).
- [78] R. Blumenhagen E. Plauschinn, *Introduction to Conformal Field Theory with Applications to String Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2009).
- [79] R. Laza, M. Schütt, and N. Yui, *Calabi-Yau Varieties: Arithmetic, Geometry and Physics*, (2015).
- [80] S. Kovacs, Y. Sato, H. Shimada, *On membrane interactions and a three-dimensional analog of Riemann surfaces*, arXiv:1508.03367v2, (2015).
- [81] S. B. Johnson and W. Taylor, *Calabi-Yau threefolds with large $h^{2,1}$* , (2014).
- [82] Stephen Hawking, *Information loss in black holes*, (2005).
- [83] Stephen Hawking, *Particle creation by black holes*, (1975).
- [84] S.W. Hawking, *Generalized second law of thermodynamics in black hole physics*, (1975).
- [85] S.Carlip, *Black Hole Thermodynamics*, (arXiv:1410.1486v2. 2015).
- [86] Sheldon Katz, *Enumerative Geometry and String Theory*, (2006).
- [87] Shing-Tung Yau, Steve Nadis *String Theory and the Geometry of the Universe's Hidden Dimensions*, (2010).
- [88] Shing-Tung Yau, *Calabi-Yau manifold*, (2009).
- [89] SH.T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kahler manifold and the complex Monge-Ampere equation. I.*, (1978).
- [90] T. Hubsch, *Calabi-Yau manifolds: A Bestiary for physicists*, (1994).

- [91] Yang-Hui He, *The Calabi-Yau Landscape: from Geometry, to Physics, to Machine-Learning*, (2018).
- [92] V. N. Dumachev, *Complete Intersection Calabi-Yau Six-folds*, (2015).
- [93] V. Braun, P. Candelas and R. Davies, *A Three-Generation Calabi-Yau Manifold with Small Hodge Numbers*, (2010).
- [94] Vincent Bouchard, *Lectures on complex geometry, Calabi-Yau manifolds and toric geometry*, (2007).
- [95] Volker Braun, *The 24-Cell and Calabi-Yau Threefolds with Hodge Numbers (1,1)*, (2011).
- [96] Yang-Hui He, *The Calabi-Yau Landscape: from Geometry, to Physics, to Machine-Learning*, (2018).
- [97] Y. H. He, *Calabi-Yau Geometries: Algorithms, Databases, and Physics*, (2013).
- [98] Y. H. He, V. Jejjala and L. Pontiggia, *Patterns in Calabi-Yau Distributions*, (2017).
- [99] Y. H. He, V. Jejjala, C. Matti, B. D. Nelson and M. Stillman, *The Geometry of Generations*, (2015).